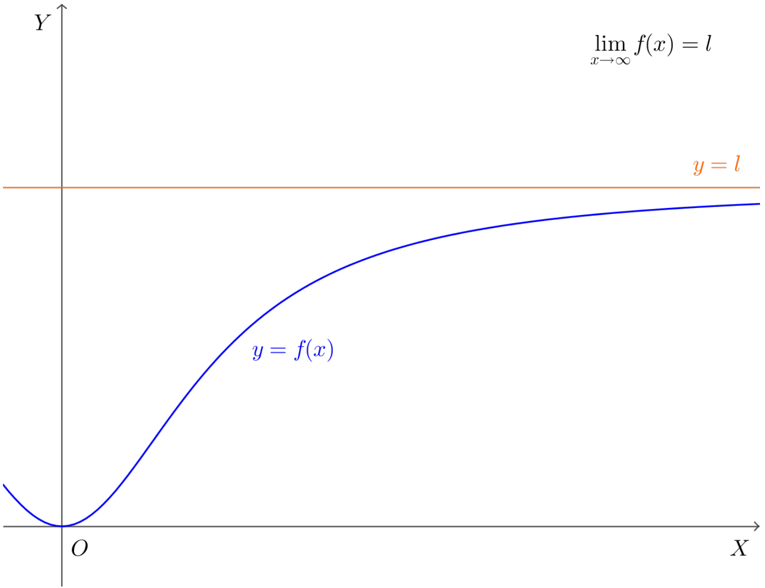
Límites. Continuidad.

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

Límite finito cuando x tiende a infinito (1)



Límite finito cuando x tiende a infinito (2)

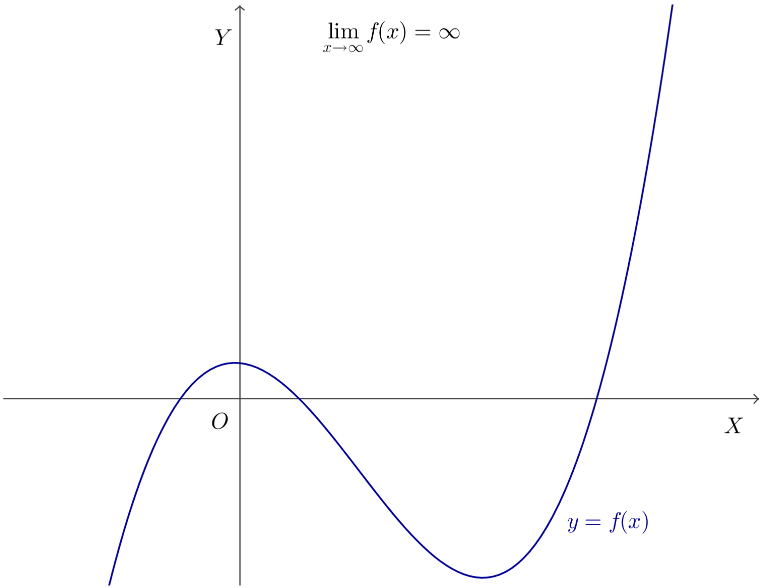
Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando la variable x tiende a infinito es l y se escribe:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

si para valores grandes de x, los valores de la función $f(x)$ son muy próximos a l.

El límite cuando x tiende a menos infinito se define de forma similar.

Límite infinito cuando x tiende a infinito (1)



Límite infinito cuando x tiende a infinito (2)

Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando la variable x tiende a infinito es infinito y se escribe:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

si para valores grandes de x, los valores de la función $f(x)$ son muy grandes.

El límite igual a menos infinito o los límites cuando x tiende a menos infinito se definen de forma similar.

Reglas generales para el cálculo de límites

Reglas generales para el cálculo de límites

- Sumas y diferencias:

$$\infty + \infty = \infty \; ; \qquad \infty \pm k = \infty$$

Reglas generales para el cálculo de límites

- Sumas y diferencias:

$$\infty + \infty = \infty \; ; \qquad \infty \pm k = \infty$$

- Productos:

$$k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0)$$

Reglas generales para el cálculo de límites

- Sumas y diferencias:

$$\infty + \infty = \infty \; ; \qquad \infty \pm k = \infty$$

- Productos:

$$k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0)$$

- Cocientes:

$$\frac{\infty}{k} = \infty \; ; \qquad \frac{k}{\infty} = 0 \; ; \qquad \frac{k}{0} = \infty \quad (k \neq 0)$$

Reglas generales para el cálculo de límites

- Sumas y diferencias:

$$\infty + \infty = \infty \; ; \qquad \infty \pm k = \infty$$

- Productos:

$$k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0)$$

- Cocientes:

$$\frac{\infty}{k} = \infty \; ; \qquad \frac{k}{\infty} = 0 \; ; \qquad \frac{k}{0} = \infty \quad (k \neq 0)$$

- Potencias:

$$\infty^k = \begin{cases} \infty & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \; ; \qquad r^\infty = \begin{cases} \infty & r > 1 \\ 0 & 0 < r < 1 \end{cases}$$

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

$$\infty - \infty \;;$$

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

$$\infty - \infty \; ; \qquad 0 \cdot \infty \; ;$$

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

$$\infty - \infty \; ; \qquad 0 \cdot \infty \; ; \qquad \frac{\infty}{\infty} \; ; \quad \frac{0}{0} \; ;$$

Casos de indeterminación

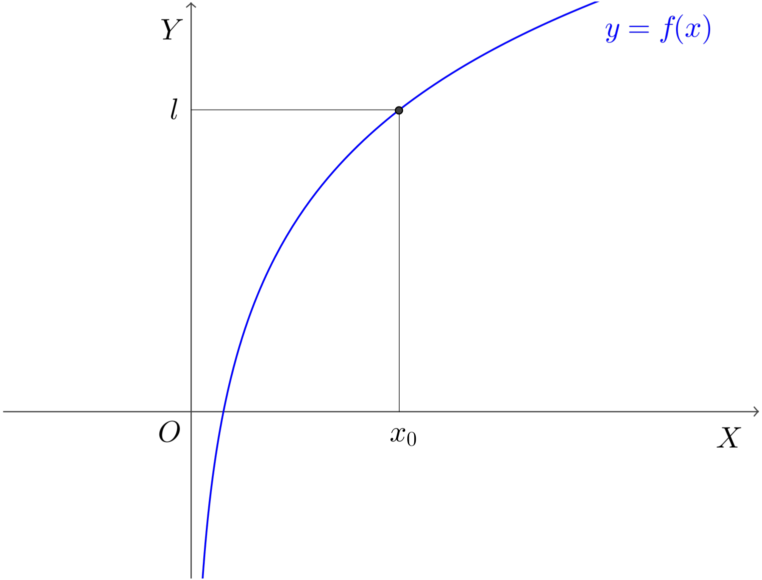
Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

$$\infty - \infty \; ; \qquad 0 \cdot \infty \; ; \qquad \frac{\infty}{\infty} \; ; \quad \frac{0}{0} \; ; \qquad \infty^0 \; ; \quad 1^\infty \; ; \quad 0^0$$

Límite cuando x tiende a un número finito (1)



Límite cuando x tiende a un número finito (2)

El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual a l si para valores de x muy próximos a x_0, los valores de la función $f(x)$ son muy próximos a l.

En ese caso se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

- Existe la función en x_0.

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

- Existe la función en x_0.
- Existe el límite de la función cuando x tiende a x_0.

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

- Existe la función en x_0.
- Existe el límite de la función cuando x tiende a x_0.
- Ambos números son iguales.

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

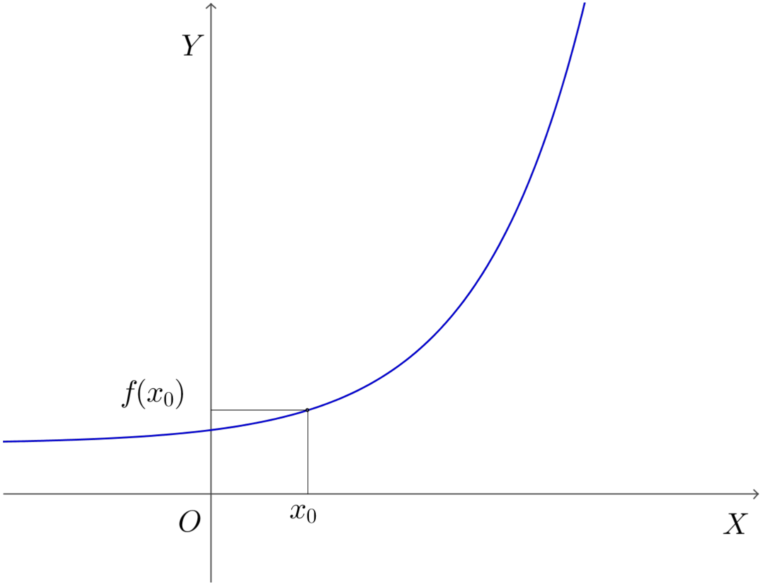
$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

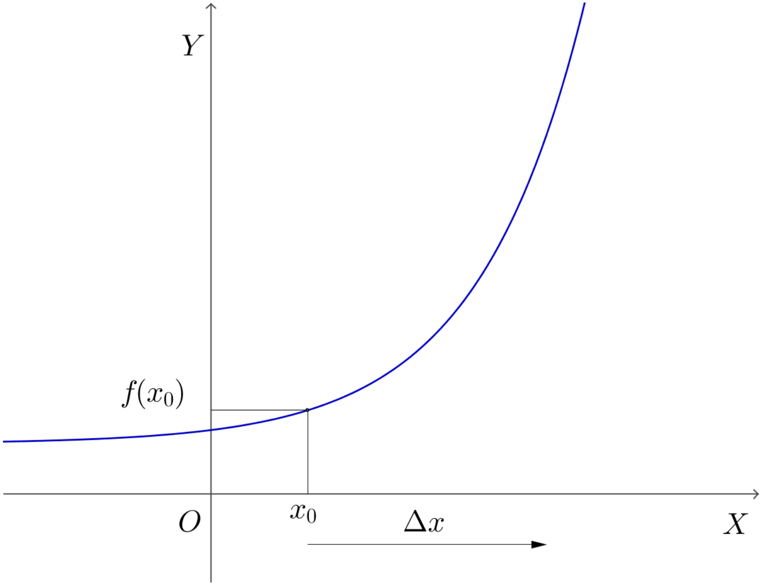
- Existe la función en x_0.
- Existe el límite de la función cuando x tiende a x_0.
- Ambos números son iguales.

Las funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas y circulares son continuas en todo su dominio de definición.

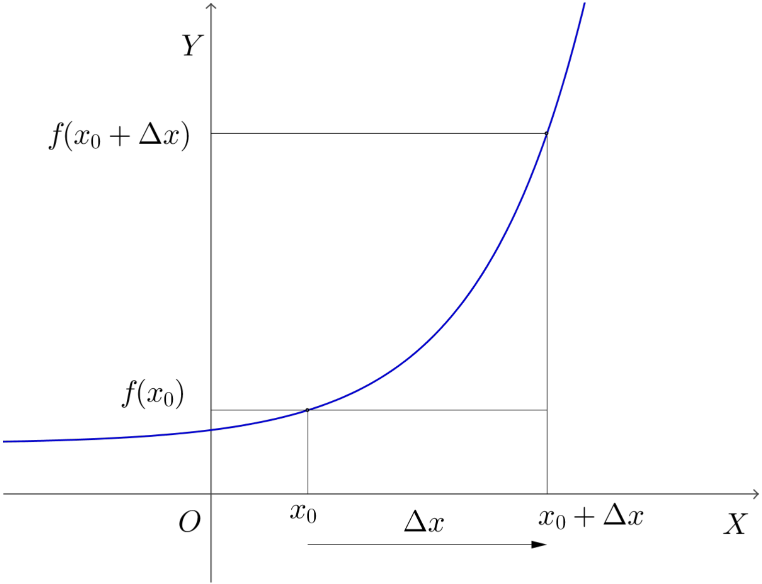
Nueva definición de continuidad



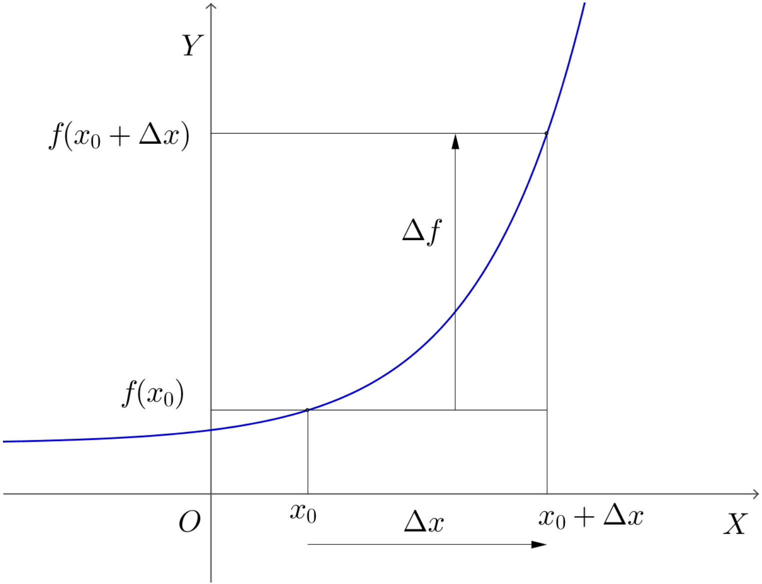
Nueva definición de continuidad



Nueva definición de continuidad



Nueva definición de continuidad



Nueva definición de continuidad

$$f \text{ continua en } x_0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nueva definición de continuidad

$$
\begin{aligned}
f \text{ continua en } x_0 &\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)
\end{aligned}
$$

Nueva definición de continuidad

$$
\begin{aligned}
f \text{ continua en } x_0 &\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 0
\end{aligned}
$$

Nueva definición de continuidad

$$
\begin{aligned}
f \text{ continua en } x_0 &\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0
\end{aligned}
$$

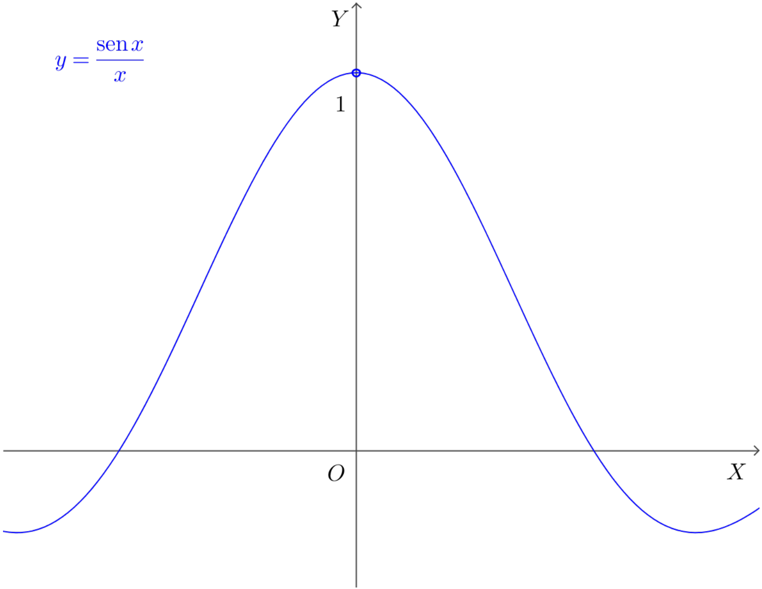
Nueva definición de continuidad

$$
\begin{aligned}
f \text{ continua en } x_0 &\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0
\end{aligned}
$$

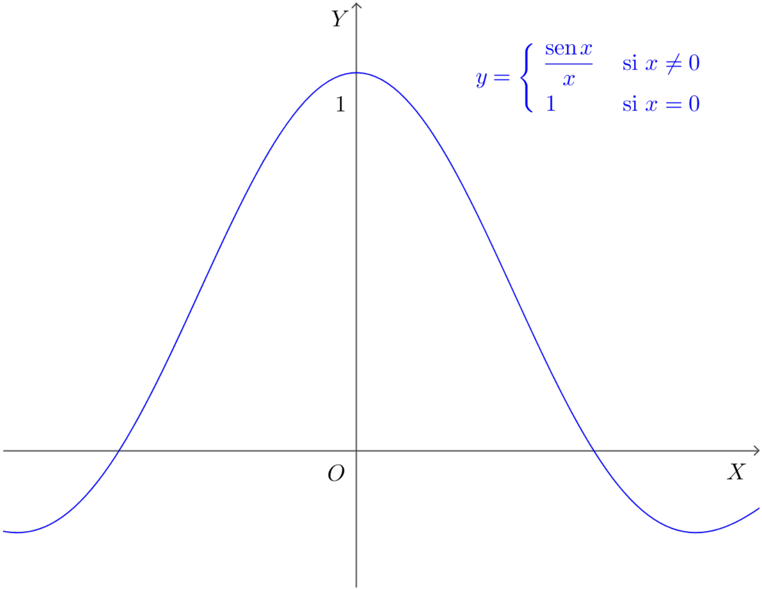
Definición (Función continua)

Una función es continua en el punto x_0 si a variaciones infinitesimales de la variable independiente, corresponden variaciones infinitesimales de la variable dependiente.

Tipos de discontinuidad(1): evitable

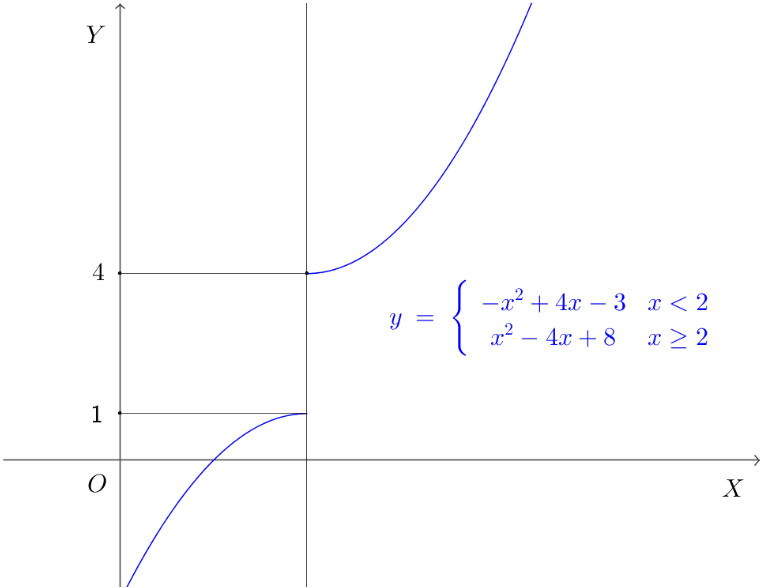


Tipos de discontinuidad(1): evitable



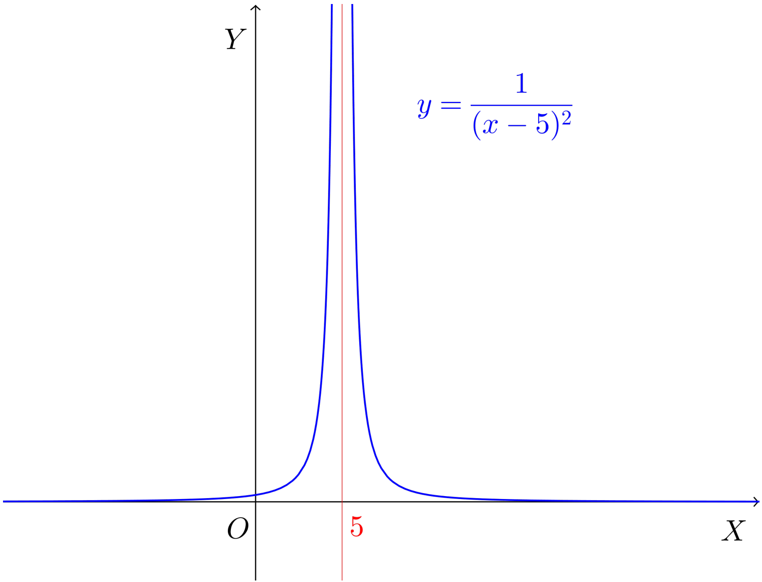
$$y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Tipos de discontinuidad(2): salto finito

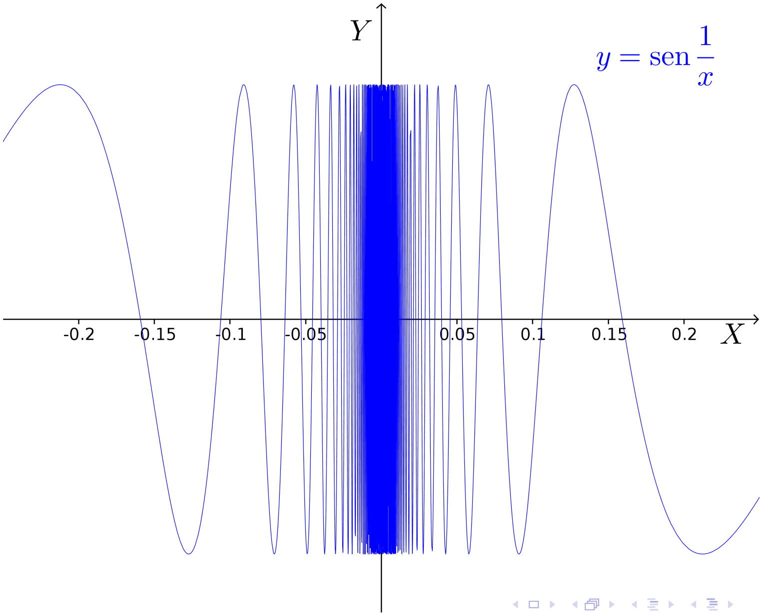


$$y = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & x < 2 \\ x^2 - 4x + 8 & x \geq 2 \end{cases}$$

Tipos de discontinuidad(3): infinito



Tipos de discontinuidad(4): esencial



Tipos de discontinuidad: clasificación

Tipos de discontinuidad: clasificación

- **Evitable**: existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.

Tipos de discontinuidad: clasificación

- **Evitable**: existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.
- **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden.

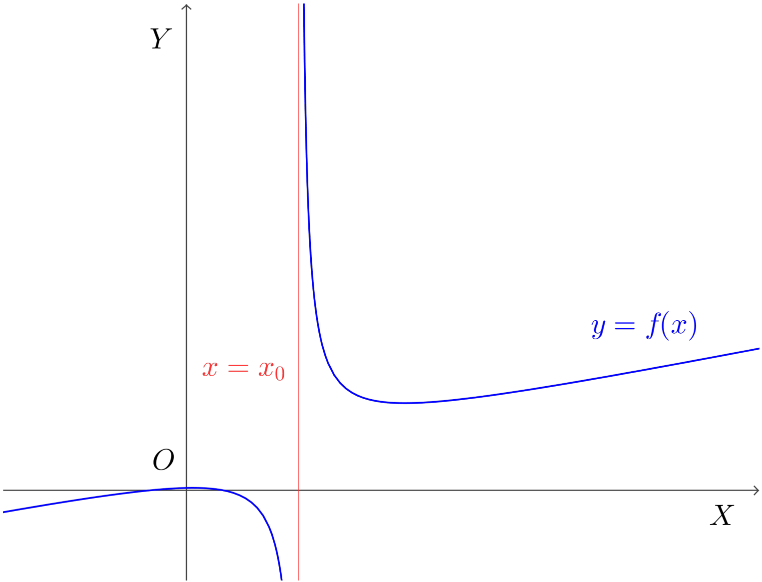
Tipos de discontinuidad: clasificación

- **Evitable**: existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.
- **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden.
- **Infinito**: alguno de los límites laterales es infinito.

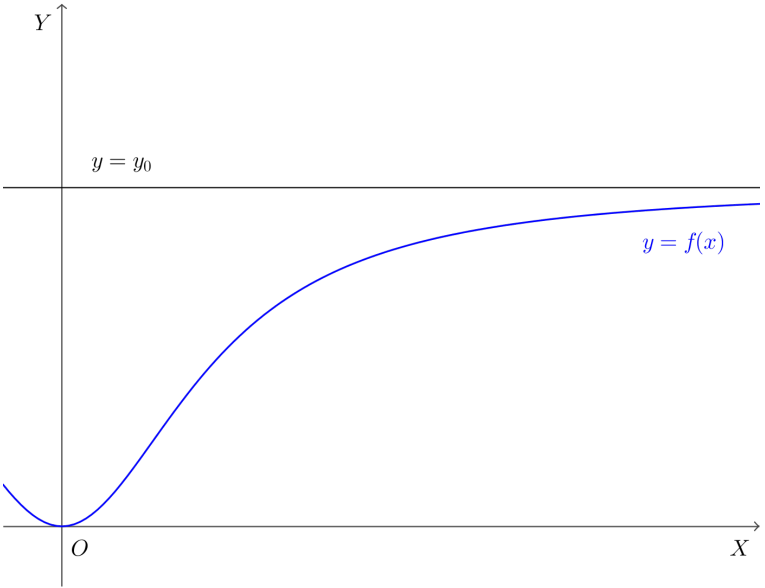
Tipos de discontinuidad: clasificación

- **Evitable**: existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.
- **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden.
- **Infinito**: alguno de los límites laterales es infinito.
- **Esencial**: no existen límites ni son infinitos.

Asíntotas verticales



Asíntotas horizontales



Asíntotas verticales y horizontales: definición

Asíntotas verticales y horizontales: definición

Definición (Asíntota vertical)

La recta $x = x_0$ es asíntota vertical de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Asíntotas verticales y horizontales: definición

Definición (Asíntota vertical)

La recta $x = x_0$ es asíntota vertical de la función $f(x)$ si:

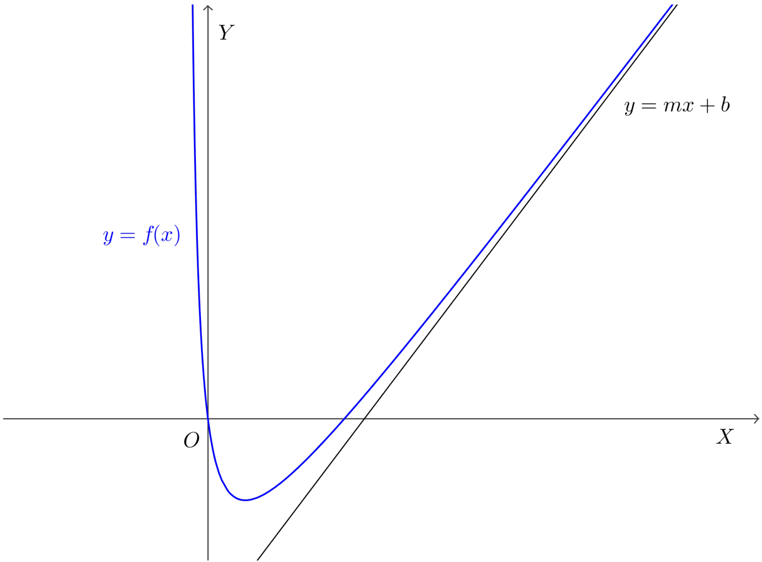
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Definición (Asíntota horizontal)

La recta $y = y_0$ es asíntota horizontal de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$$

Asíntotas oblicuas



Asíntotas oblicuas: definición

Definición (Asíntota oblicua)

La recta $y = mx + b$ es asíntota de la función $f(x)$ si la diferencia entre las ordenadas de los puntos de la curva y la recta tiende a cero cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - y) = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - b) = 0$$

Asíntotas oblicuas: definición

Definición (Asíntota oblicua)

La recta $y = mx + b$ es asíntota de la función $f(x)$ si la diferencia entre las ordenadas de los puntos de la curva y la recta tiende a cero cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx - b) = 0$$

De aquí podemos calcular m y b:

$$m = \frac{y-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = y - mx = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

Agradecimiento

Gracias por su atención.