OPCIÓN A

1. *Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se tienen 500 kg de A y 500 kg de B. En la mezcla, el peso de B debe ser menor o igual que 1,5 veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual que 600 kg. Sabiendo que cada kg de A cuesta 5 euros y cada kg de B cuesta 4 euros, calcular los kg de A y de B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste mínimo.*

Solución:

Llamando:

$$\begin{aligned} x &= \text{número de kg de A} \\ y &= \text{número de kg de B} \end{aligned}$$

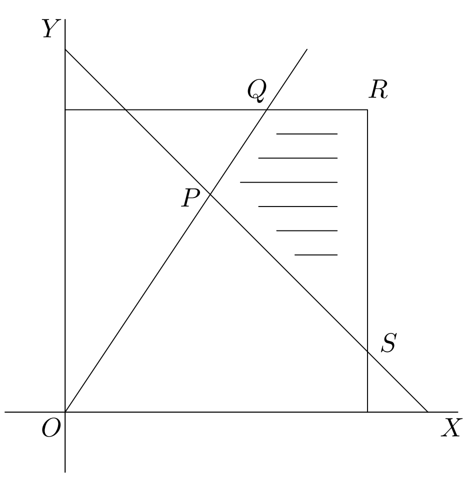
La función objetivo a minimizar es:

$$F(x,y) = 5x + 4y$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} y &\leq 1{,}5x \\ x &\leq 500 \\ y &\leq 500 \\ x+y &\geq 600 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Representemos la región factible:



Las coordenadas de los vértices de la región factible son:

$P(240, 360) \qquad F(P) = 2640$

$Q(\frac{1000}{3}, 500) \qquad F(Q) = 3666$

$R(500, 500) \qquad F(R) = 4500$

$S(500, 100) \qquad F(S) = 2900$

El valor mínimo de la función objetivo se da en $P(240, 360)$ donde vale 2640.

2. *Calcular la integral definida:*

$$\int_{-1}^{1} (|x| + x + 1)\ dx$$

Nota.- La notación $|x|$ *representa el valor absoluto de* x*.*

Solución:

Teniendo en cuenta la definición de la función valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad |x| + x + 1 = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Entonces, la integral vale:

$$\int_{-1}^{1} (|x| + x + 1)\ dx = \int_{-1}^{0} 1\ dx\ + \int_{0}^{1} (2x+1)\ dx = \Big[x\Big]_{-1}^{0} + \left[\frac{2x^2}{2} + x\right]_{0}^{1} = 3$$

3. *Dos expertos* E_1 *y* E_2*, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. la probabilidad de que una peritación haya sido realizada por* E_1 *es* 0,55 *y por* E_2 *es* 0,45*. Si una peritación ha sido realizada por* E_1*, la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es* 0,98 *y si ha sido realizada por* E_2*, la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es* 0,90*. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por* E_2*.*

Solución:

Utilicemos la siguiente notación:

E_1 = "La peritación ha sido realizada por el primer experto"
E_2 = "La peritación ha sido realizada por el segundo experto"
I = "La peritación ha dado lugar a indemnización"
$\bar{I}$ = "La peritación no ha dado lugar a indemnización"

El problema responde al siguiente esquema:

Los datos del problema son $p(E_1) = 0{,}55$, $p(E_2) = 0{,}45$, $p(I/E_1) = 0{,}98$ y $p(I/E_2) = 0{,}90$. Según el teorema de Bayes, la probabilidad pedida es:

$$p(E_2/I) = \frac{p(I/E_2)\ p(E_2)}{p(I/E_2)\ p(E_2) + p(I/E_1)\ p(E_1)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}45}{0{,}9 \times 0{,}45 + 0{,}98 \times 0{,}55} = 0{,}4290$$

4. *En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable aleatoria normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:*

   a) *¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos?*

   b) *¿Cuál es la distribución de la media muestral si se toman muestras aleatorias de 64 clientes? Especificar sus parámetros.*

   Solución:

   La media muestral sigue una distribución normal de media 10 y desviación típica $\dfrac{2}{\sqrt{25}} = 0{,}4$. Entonces:

   $$p(\bar{x} < 9) = p\left(z < \frac{9-10}{0{,}4}\right) = p\,(z < -2{,}5) = p\,(z > 2{,}5) = 0{,}062$$

   Si se toman muestras de 64 clientes, la distribución de medias muestrales es normal, tiene la misma media que la población, es decir 10, y desviación típica $2/\sqrt{6}4 = 0{,}25$.

OPCIÓN B

1. *Hallar todas las matrices:*

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

que satisfacen la ecuación matricial

$$X^2 = 2X$$

Solución:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+cb & c^2 \end{pmatrix}$$

Puesto que $X^2 = 2X$:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

De manera que debe cumplirse el sistema:

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & 2a \\ ab+cb & = & 2b \\ c^2 & = & 2c \end{array}$$

La primera ecuación tiene como soluciones $a = 0$ y $a = 2$; La tercera tiene como soluciones $c = 0$ y $c = 2$. La segunda ecuación nos da los posibles valores de b:

a) $a = 0, c = 0 \Longrightarrow b = 0$. La matriz solución es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $a = 0, c = 2 \Longrightarrow 2b = 2b$: en este caso, b puede tomar cualquier valor. La solución es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} \qquad b \in \mathbb{R}$$

c) $a = 2, c = 0 \Longrightarrow 2b = 2b$: como en el caso anterior, b puede tomar cualquier valor. La solución es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad b \in \mathbb{R}$$

d) $a = 2, c = 2 \Longrightarrow b = 0$: la solución es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. *Se considera la función real de variable real definida por:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$$

a) *Determinar su dominio de definición*

b) *Obtener sus asíntotas*

Solución:

Para que esté definida la función, el radicando debe ser positivo. Esto sucederá si el numerador y denominador son ambos positivos o ambos negativos. El dominio es la solución de alguno de estos sistemas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2-4 & \geq & 0 \\ x^2-1 & > & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x \in (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2-4 & \leq & 0 \\ x^2-1 & < & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x \in (-1,1)$$

El dominio de la función es: $(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,\infty)$.

La recta $x=1$ es asíntota vertical de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=\infty$$

Igualmente $x=-1$ es asíntota vertical puesto que:

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=\infty$$

La asíntota horizontal es $y=1$ puesto que:

$$\lim_{x\to \infty}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=1$$

No hay asíntota oblicua.

3. *En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4 respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es* 0,02 *y de que una de bajo consumo sea defectuosa es* 0,09*. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?*

Solución:

La probabilidad de elegir una bombilla halógena es $p(H)=3/7$ y la probabilidad de elegir una de bajo consumo es $p(B)=4/7$. Si la bombilla es halógena, la probabilidad de que no sea defectuosa es $p(\bar{D}/H)=0{,}98$ y si es de bajo consumo, la probabilidad de que no sea defectuosa es $p(\bar{D}/B)=0{,}91$.

El problema responde al siguiente esquema:

Según el teorema de Bayes, la probabilidad pedida es:

$$p(H/\bar{D})=\frac{p(\bar{D}/H)\cdot p(H)}{p(\bar{D}/H)\cdot p(H)+p(\bar{D}/B)\cdot p(B)}=\frac{0{,}98\times 3/7}{0{,}98\times 3/7+0{,}91\times 4/7}=0{,}4469$$

4. *El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son:*

$$255 \quad 85 \quad 120 \quad 290 \quad 80 \quad 80 \quad 275 \quad 290 \quad 135$$

   a) *Construir un intervalo de confianza al 98 % para la media poblacional*

   b) *Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99 %, el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.*

Solución:

En primer lugar calculamos la media muestral que resulta ser $\overline{X} = 178{,}889$. Como conocemos el tamaño de la muestra $n = 9$, y la desviación típica $\sigma = 100$, para obtener el intervalo de confianza solo nos queda calcular el valor de z_c para un nivel de confianza del 98 %:

$$p(-z_c < z < z_c) = 0{,}98 \Longrightarrow p(z < z_c) = 0{,}99 \Longrightarrow z_c = 2{,}33$$

Entonces, el intervalo de confianza es:

$$\left(178{,}889 - \frac{2{,}33 \times 100}{\sqrt{9}}\ ,\ 178{,}889 + \frac{2{,}33 \times 100}{\sqrt{9}}\right) = (101{,}22\ ,\ 256{,}56)$$

Para la segunda cuestión debemos calcular n sabiendo que $c = 0{,}99$ (y por tanto $z_c = 2{,}575$) y que el error en la estimación no debe superar los 50 euros:

$$E = \frac{z_c \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_c \cdot \sigma}{E}\right)^2 = 26{,}62$$

Como este número no puede ser fraccionario, el tamaño de la muestra debe ser como mínimo de 27.