**MADRID JUNIO 2003**

**OPCIÓN A**

1. Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ -x-y &= 1 \\ -y-z &= -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

y claramente las dos primeras columnas son independientes, el rango de la matriz de coeficientes es igual a 2. Para obtener el rango de la matriz ampliada, se calcula el determinanate:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

en el que se ha sustituído la tercera columna por los términos independientes. Este determinante también es cero y, por consiguiente, el rango de la matriz ampliada es también 2. El sistema es compatible indeterminado. Solamente hay dos ecuaciones independientes. Considerando la segunda y la tercera que son más sencillas y tomando $z=\lambda$ como parámetro resulta que la solución es:

$$(\lambda-2, 1-\lambda, \lambda)$$

---

2. Sean las funciones $f(x)=x^2-9$ y $g(x)=x^2-x-6$, calcular:

*a*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

*b*) Los extremos relativos de $g(x)$ si existen.

*c*) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje $OX$ y las rectas $x=3$, $x=6$.

SOLUCIÓN:

*a*) Las dos funciones valen cero en $x=3$. Se trata de un límite indeterminado del tipo 0/0. La indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

*b*) Es una parábola que tiene un mínimo. Igualando a cero la derivada se obtiene:

$$g'(x) = 2x-1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Para $x=\frac{1}{2}$, $g(\frac{1}{2}) = -\frac{25}{4}$. El mínimo esta en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

*c*) Entre $x = 3$ y $x = 6$ no hay puntos de corte de $f(x)$ con el eje $OX$. Por tanto, el área es igual a la siguiente integral:

$$S = \int_3^6 (x^2 - 9)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^6 = 36$$

---

3. El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se eligen al azar tres personas del censo. Calcular la probabilida de los siguientes sucesos:

   *a*) Las tres personas votan al candidato A.

   *b*) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.

   *c*) Al menos una de las tres personas se abstiene.

   SOLUCIÓN:

   *a*) $p(\text{“las tres votan a A”}) = 0{,}45 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}45$

   *b*) $p(\text{“dos votan a A y una a B”}) = 0{,}45 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}35 \cdot 3$

   *c*) $p(\text{“al menos una se abstiene}'') = 1 - p(\text{“todas votan”}) = 1 - 0{,}80^3$

---

4. Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica de 0,05 segundos. Se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

   SOLUCIÓN:

   El error en la estimación está dado por $E = z_c \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Despejando $n$ y sustituyendo los datos:

$$n = \left(\frac{z_c \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}575 \cdot 0{,}05}{0{,}01}\right)^2 \simeq 166{,}4$$

   El tamaño de la muestra debe ser como mínimo de 167 personas.

**OPCIÓN B**

1. Un vendedor quiere dar salida a 400 kg de garbanzos, 300 kg de lentejas y 250 kg de judías. Para ello hace dos tipos de paquetes. Los de tipo A contienen 2 kg de garbanzos, 2 kg de lentejas y 1 kg de judías y los del tipo B contienen 3 kg de garbanzos, 1 kg de lentejas y 2 kg de judías. El precio de venta de cada paquete es de 25 euros para los de tipo A y 35 euros para los del tipo B. ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

   SOLUCIÓN:

   La función objetivo es $F(x, y) = 25x + 35y$ y debe ser máxima con las siguientes restricciones:

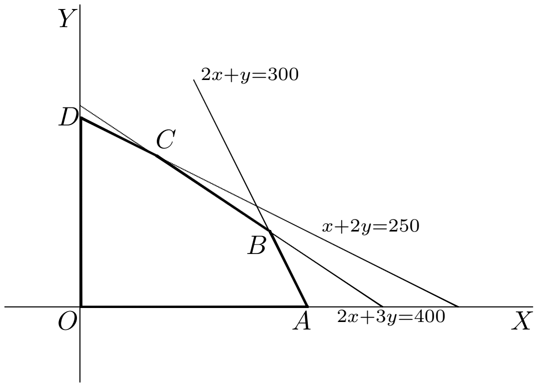
$$\begin{aligned} 2x + 3y &\leq 400 \\ 2x + y &\leq 300 \\ x + 2y &\leq 250 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

   Los vértices de la región factible son:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 300 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(150, 0) \qquad \left.\begin{aligned} x + 2y &= 250 \\ 2x + 3y &= 400 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C(50, 100)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 400 \\ 2x + y &= 300 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(125, 50) \qquad \left.\begin{aligned} x + 2y &= 250 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D(0, 125)$$

   La región factible aparece representada en el siguiente gráfico:




   El valor máximo de $F(x, y)$ se obtiene en el punto $B(125, 50)$. En este punto $F(125, 50) = 4875$.

---

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$:

   *a*) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   *b*) Calcular sus asíntotas.

   *c*) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

SOLUCIÓN:

*a*) La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1 - x^2) - (-2x) \cdot x}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$$

El numerador y el denominador son números positivos para cualquier $x$ salvo para $x = 1$ y $x = -1$ en que se anula el denominador. Por consiguiente la función es siempre creciente salvo en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ en los que no existe la función.

*b*) Para $x = 1$ y $x = -1$ la función se hace infinita. Estas son por tanto, las asíntotas verticales de la función.

Cuando $x$ tiende a $\infty$ el límite de la función es:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0$$

Entonces, la asíntota horizontal es $y = 0$.

*c*) Para $x = 0$, $f(0) = 0$. Por tanto el punto de tangencia es $(0, 0)$. La pendiente de la tangente es al derivada en el punto 0 que vale $f'(0) = 1$. En consecuencia, la ecuación de la tangente es $y = 0 + 1 \cdot (x - 0)$ o mejor $y = x$.

---

3. De una baraja española de 40 cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

*a*) Tres reyes.

*b*) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.

*c*) Un as, un tres y un seis en cualquier orden.

SOLUCIÓN:

*a*) $p(\text{“tres reyes”}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$

*b*) $p(\text{“figura en la 1}^{\text{a}}\text{, cinco en la 2}^{\text{a}}\text{ y seis en la 3}^{\text{a}}\text{”}) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38}$

*c*) $p(\text{“un as, un tres y un seis”}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot 6$

Se ha multiplicado por 6 puesto que existen seis posibilidades en el orden en que pueden salir las cartas (136, 163, 316, 361, 613 y 631).

---

4. Se probaron 10 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros, por cada 100 kilómetros fue de 6,5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

   SOLUCIÓN:

   El intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - z_c \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_c \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

   Sustituyendo los valores $\bar{x} = 6{,}5$; $z_c = 1{,}96$; $\sigma = 2$ y $n = 10$; resulta el intervalo $(5{,}26\ ;\ 7{,}74)$.