PROGRAMACIÓN LINEAL

Jesús García de Jalón de la Fuente

1. Sistemas de inecuaciones

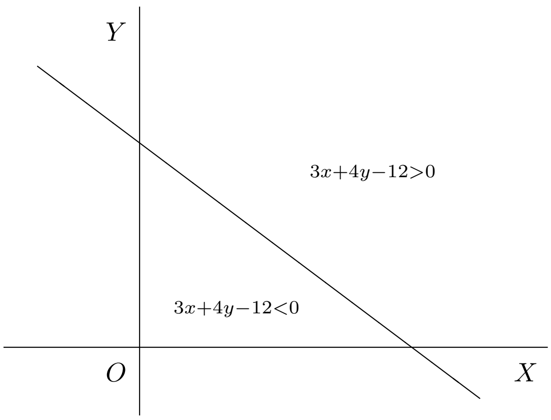
Una inecuación lineal con dos incógnitas tiene la forma:

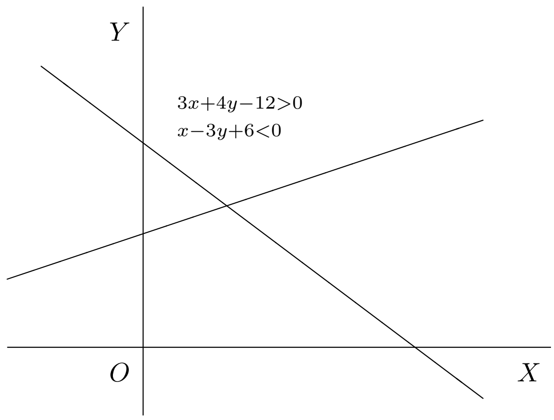
$$Ax + By + C < 0$$

En lugar del signo $<$ pueden aparecer $>$, $\leq$ o $\geq$.

Como es sabido, el conjunto de puntos que cumplen la ecuación $Ax+By+C < 0$ forman una línea recta. esta recta divide el plano en dos semiplanos; en uno de ellos se cumple que $Ax+By+C < 0$ y en otro se cumple que $Ax + By + C > 0$. Por consiguiente, la solución de la inecuación está formada por los puntos de uno de los dos semiplanos (y la recta, en el caso de una inecuación con los signos $\leq$ o $\geq$.

Para determinar cuál de los dos semiplanos es la solución, basta probar si un punto particular de uno se los semiplanos (por ejemplo el origen de coordenadas en el caso de que no esté contenido en la recta es solución.





La solución de un sistema de dos inecuaciones lineales será la intersección de los dos semiplanos solución, es decir, será una de las cuatro regiones en que las rectas que se cortan dividen el plano.

Las soluciones de un sistema formado por un número cualquiera de inecuaciones:

$$\begin{array}{c} A_1x + B_1y + C_1 < 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 < 0 \\ \cdots \\ A_nx + B_ny + C_n < 0 \end{array}$$

forman una región del plano limitada por una línea poligonal. Esta región puede estar acotada o no (un conjunto de puntos es acotado si existe un cuadrado que los contiene a todos) pero siempre es un conjunto convexo. Un conjunto de puntos es convexo, si dados dos puntos del conjunto P y Q, también pertenecen al conjunto todos los puntos del segmento PQ.

2. Programación lineal

Los problemas de programación lineal consisten en encontrar los valores de x e y que hacen que sea máxima o mínima una **función objetivo**:

$$F(x, y) = Mx + Ny$$

sujeta a un conjunto de **restricciones**:

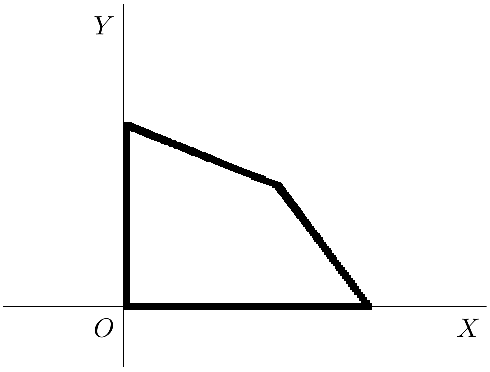
$$A_1x + B_1y + C_1 \leq 0$$

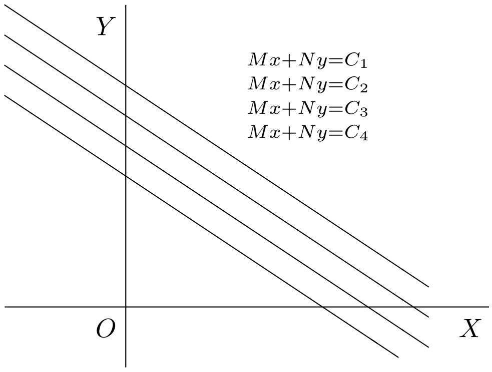
$$A_2x + B_2y + C_2 \leq 0$$

$$\cdots$$

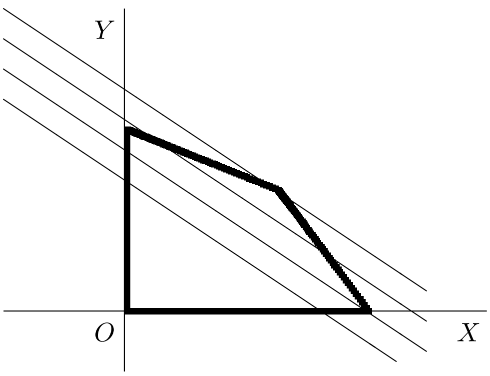
$$A_nx + B_ny + C_n \leq 0$$

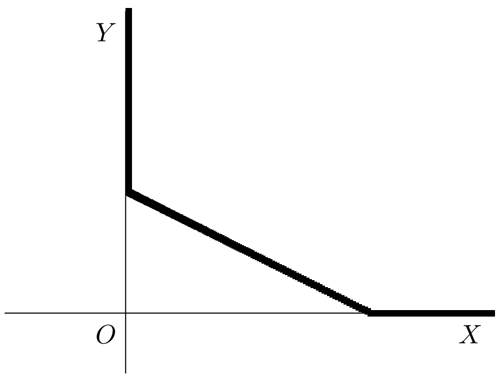
El conjunto de restricciones, defin una región del plano llamada **región factible**. Como hemos visto, la región factible es **convexa** y puede ser o no ser acotada.





Consideremos una región factible acotada como la que está representada en la figura (la superficie interior al polígono dibujado con trazo grueso). Los puntos para los que la función objetivo toma determinados valores C_1, C_2. C_3 y C_4, son rectas tales como las representadas en la segunda figura. Cuanto mayor es el valor de la función objetivo tanto más alejada está la recta del origen de coordenadas.





Queda claro que el valor máximo de la función objetivo se dará en un vértice de la región factible y entre los vértices deberemos buscar por tanto, la solución del problema. Es posible que el mismo valor máximo se dé en dos vértices. Entonces, como el polígono es convexo, el mismo valor se dará en el segmento que une los dos vértices. En este caso la solución no es un vértice sino un lado del polígono.