LÍMITES Y CONTINUIDAD

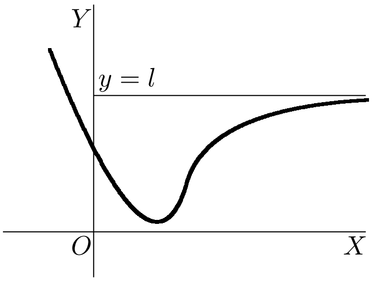
Jesús García de Jalón de la Fuente

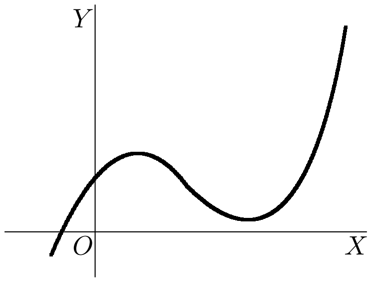
1. LIMITES

- **Límites cuando $x \to \infty$**

  La función $f(x)$ tiene por límite l cuando x tiende a ∞ y se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ si cuando x toma valores muy grandes, los valores de $f(x)$ son muy próximos a l.

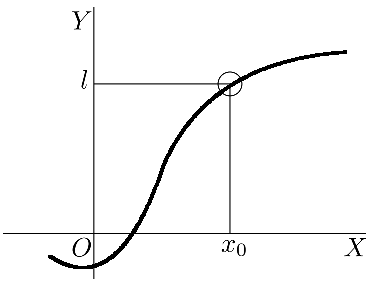
  La función $f(x)$ tiene por límite ∞ cuando x tiende a ∞ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$) si para valores grandes de x, los valores de $f(x)$ son también muy grandes.

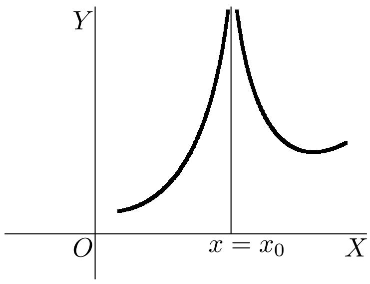




  De forma similar se definen los límites cuando x tiende a $-\infty$.

- **Limites cuando $x \to x_0$**





  La función $f(x)$ tiene por límite l cuando x tiende a x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$) si cuando x toma valores muy próximos a x_0 (pero distintos de x_0), los valores de $f(x)$ son muy próximos a l.

  La función $f(x)$ tiene por límite ∞ cuando x tiende a x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$) si para valores de x muy próximos a x_0 (pero distintos de x_0), los valores de $f(x)$ son muy grandes.

- **Limites por la derecha y por la izquierda**

  En ocasiones, es conveniente considerar valores de x próximos a x_0 mayores o menores que x_0. Se definen entonces los límites por la izquierda y por la derecha de la manera siguiente:

La función $f(x)$ tiene por límite l cuando x tiende a x_0 por la izquierda

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

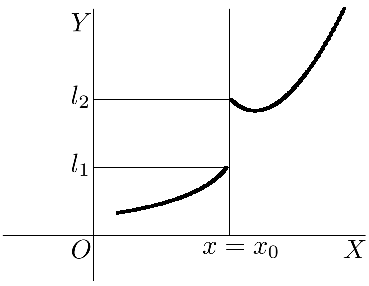
si para valores de x próximos a x_0, distintos de x_0 y menores que x_0, los valores de $f(x)$ son próximos a l.

La función $f(x)$ tiene por límite l cuando x tiende a x_0 por la derecha

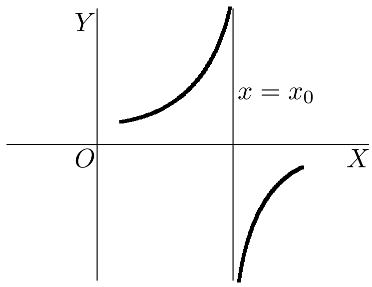
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

si para valores de x próximos a x_0, distintos de x_0 y mayores que x_0, los valores de $f(x)$ son próximos a l.

Si los dos límites laterales son iguales, ese número es el límite de la función.



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

2. ASINTOTAS

- **Asíntotas horizontales.** La recta $y = y_0$ es asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$$

- **Asíntotas verticales.** La recta $x = x_0$ es asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si

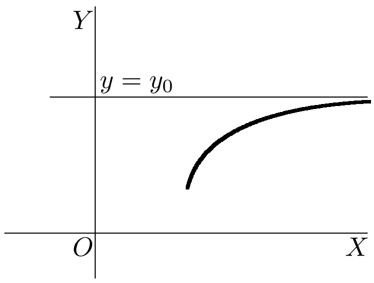
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

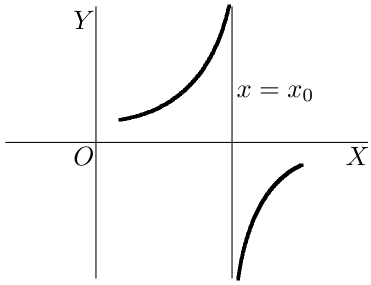
- **Asíntotas oblicuas.** La recta $y = mx + b$ es asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ si

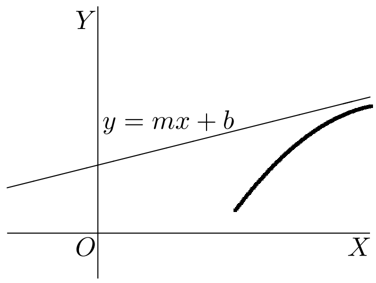
$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

que equivale a las dos condiciones:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$







3. FUNCIONES CONTINUAS

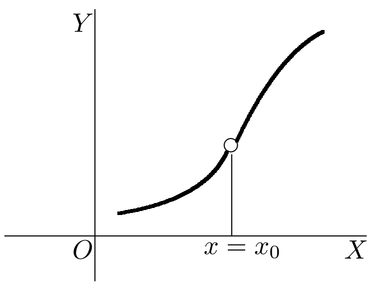
La función $f(x)$ es **continua** en el punto x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

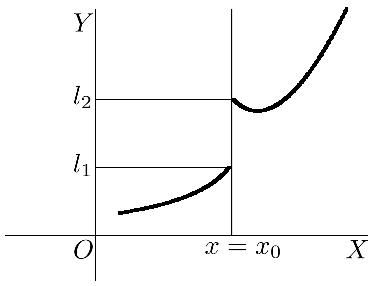
es decir, el límite de la función en el punto coincide con el valor de la función en el punto. Para calcular límites de funciones continuas, basta calcular el valor de la función.

Para que una función sea continua, debe existir el límite de la función (es decir, los dos límites laterales que deben ser iguales) y este número debe ser igual al valor de la función. En base a estas condiciones podemos clasificar los **puntos de discontinuidad** (aquellos valores de x para los que la función no es continua) de la siguiente forma:

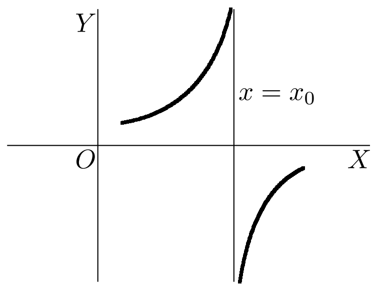
- **Discontinuidad evitable**: existe el límite, pero no coincide con el valor de la función
- **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden
- **Salto infinito**: uno o los dos límites laterales son infinitos
- **Discontinuidad esencial**: no existe el límite de la función ni es infinito



Discontinuidad evitable



Salto finito



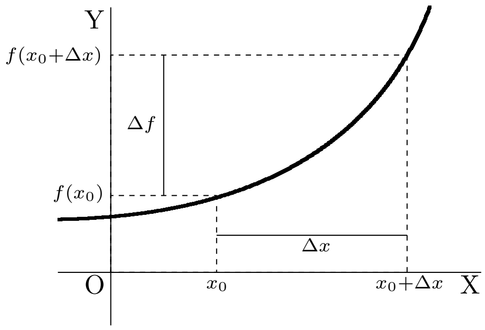
Salto infinito

La continuidad de una función puede definirse también de la siguiente forma:
Llamemos $x = x_0 + \Delta x$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

o bien

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$



de donde resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

donde se ha llamado Δf a la variación de la función f cuando la variable x cambia en la cantidad Δx. Esta nueva definición puede expresarse de la siguiente forma: *una función es continua, si a variaciones infinitesimales de la variable dependiente, corresponden variaciones infinitesimales de la variable dependiente.*

4. REGLAS PARA EL CALCULO DE LIMITES

A) LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

Reglas generales: Para calcular estos límites pueden aplicarse las siguientes reglas:

$$\infty \pm k = \infty \qquad k \cdot \infty = \infty \qquad (k \neq 0) \quad \frac{\infty}{k} = \infty \qquad \frac{k}{0} = \infty$$

$$\infty^k = \begin{cases} \infty & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad r^{\infty} = \begin{cases} \infty & r > 1 \\ 0 & r < 1 \end{cases}$$

Cuando no se pueden aplicar esas reglas, los límites se llaman indeterminados yb es preciso aplicar otros procedimientos. Son límites indeterminados los del tipo:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad \infty^0 \qquad 1^{\infty}$$

Funciones polinómicas y racionales: Las indeterminaciones que se presentan se resuelven teniendo en cuenta solamente los términos de mayor grado de cada polinomio. Para calcular el límite de la diferencia de dos fracciones que tienden a infinito se hace previamente la resta.

Otras funciones: Si hay que comparar infinitos de distintos tipos en indeterminaciones del tipo ∞/∞ o $\infty - \infty$ se tiene en cuenta que los infinitos más grandes son los exponenciales (a^x), despues los potenciales (x^n) y finalmente los logarítmicos ($log_a x$)

B) LÍMITES CUANDO x TIENDE A UN NÚMERO c

Regla general: Se aplica la definición de función continua, es decir, se sustituye x por c.

Límites infinitos: Si al calcular el límite de una fracción por el procedimiento anterior, el denominador es cero y el numerador es distinto de cero, el límite es infinito. Para saber si es $+\infty$ o $-\infty$, se calculan los límites laterales.

Límites indeterminados: Si al calcular el límite de un cociente de polinomios resulta que, tanto el numerador como el denominador tienden a cero (indeterminación del tipo $0/0$), puede resolverse esta indeterminación dividiendo numerador y denominador por $x - c$.