INTEGRALES

Jesús García de Jalón de la Fuente

1. Integral indefinida

La función $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ si la derivada de $F(x)$ es $f(x)$:

$$F(x) \text{ primitiva de } f(x) \Longleftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también lo es $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Además, todas las primitivas de la función $f(x)$ pueden expresarse como una de ellas más una constante. El conjunto de todas las primitivas de una función se llama **integral indefinida** de la función y se representa mediante:

$$\int f(x)\,dx$$

de acuerdo con lo anterior, si $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$ puede escribirse:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

De la definición se desprende que las integrales indefinidas verifican las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\;dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int Kf(x)\,dx = K\int f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
4. $\displaystyle D\int f(x)\,dx = f(x)$

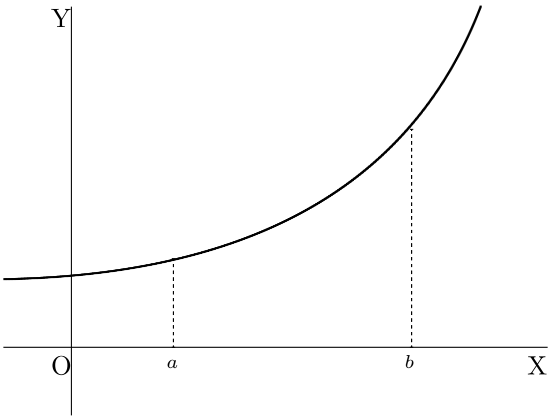
A partir de las reglas de derivación se deducen las siguientes reglas de integración:

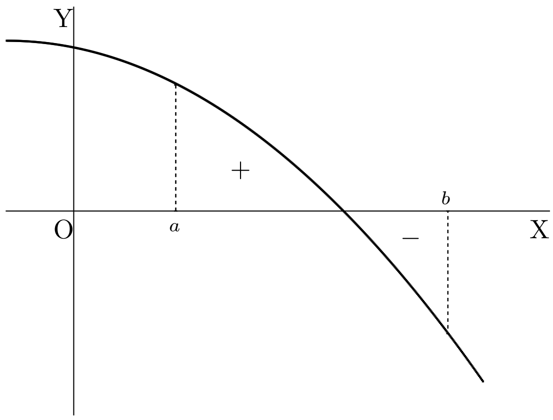
FUNCIONES SIMPLES	FUNCIONES COMPUESTAS
$\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\displaystyle\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\displaystyle\int e^u u'\,dx = e^u + C \qquad \int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$	$\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln u + C$

2. Integral definida

Sea $f(x)$ una función continua definida en el intervalo $[a, b]$. La **integral definida** de $f(x)$ en $[a, b]$ es el área del recinto limitado por el eje OX, la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, con signo positivo si la función es positiva en el intervalo y con signo negativo si la función es negativa. Este número se representa por:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

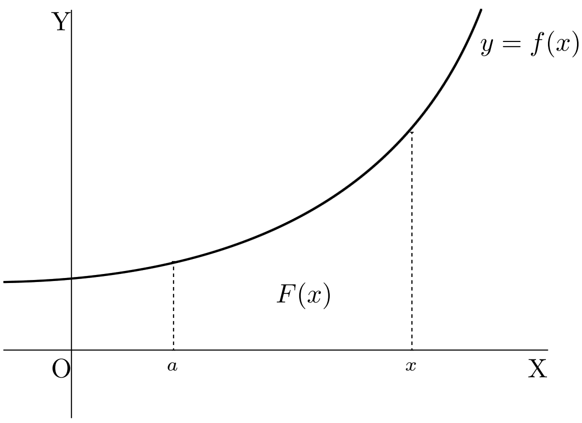




3. Teorema fundamental del cálculo

Sea la integral definida de una función $f(x)$ entre un extremo fijo a y otro variable x. Consideremos esta integral como una función del extremo superior x:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



El **teorema fundamental del cálculo integral** establece que esta función es una primitiva de la función integrada $f(x)$, es decir, que su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = D\int_a^x f(x)\,dx = f(x)$$

Este teorema permite calcular la integral definida cuando se conoce una primitiva cualquiera de la función $f(x)$. En efecto, sea $F(x)$ esta primitiva. Puesto que dos primitivas de la misma función se diferencian en una constante, podemos escribir que:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

y puesto que para $x = a$ la integral vale cero:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0$$

se tiene que $C = -F(a)$. Por consiguiente, para $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

resultado que se conoce como **regla de Barrow**.