FUNCIONES

Jesús García de Jalón de la Fuente

1. Funciones. Ecuaciones. Curvas

Una **función** es una correspondencia entre números. Mediante la función f a cada número x se le hace coresponder un solo número que se representa por $f(x)$. Puesto que tanto x como $f(x)$ pueden tomar diversos valores se les denomina **variables**. A x se le llama **variable independiente** y a $f(x)$ **variable dependiente**. El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se llama **dominio** o dominio de definición de la función.

Una **ecuación** con dos incógnitas x e y puede servir para definir una función siempre que para cada valor de x, la ecuación tenga una sola solución para y. Por ejemplo, la ecuación $x+y=3$ define una función (a cada valor de x esta ecuación hace corresponder un solo valor de y). Sin embargo, la ecuación $y^2+x=10$ no define una función pues para algunos valores de x existen dos soluciones de y.

Mediante una **curva** y unos ejes de coordenadas también puede definirse una función. A cada valor de la abscisa x se le puede asociar la ordenada del punto de la curva que tiene esa abscisa. Si hay dos puntos de la curva que tienen la misma abscisa, esa curva no define una función. Por ejemplo, una recta no paralela al eje de ordenadas, define una función; por el contrario, una circunferencia o una elipse no definen funciones. La curva asociada a una función se llama **representación gráfica de la función**.

Si las infinitas soluciones de una ecuación con dos incógnitas x e y las consideramos como coordenadas de puntos, el conjunto de todos estos puntos forma una curva. Recíprocamente, la condición que cumplen todos los puntos de una curva se llama **ecuación de la curva**. Para la función f, su representación gráfica es una curva cuya ecuación es $y=f(x)$.

2. Ecuación de una recta

El conjunto de las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas x e y interpretadas como coordenadas de puntos, forman una recta. Recíprocamente, todos los puntos de una recta en un sistema de coordenadas son solución de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

El concepto fundamental para asociar todos los puntos de una recta con la ecuación que cumplen es el de **pendiente**. Se llama así al cociente de las variaciones de x y de y entre dos puntos de la recta:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La pendiente de una recta puede ser positiva o negativa dependiendo de que las variaciones de x y de y sean del mismo signo o de signo contrario.

Conocidos un punto $P(x_0,y_0)$ de la recta y su pendiente m, la ecuación de la recta es:

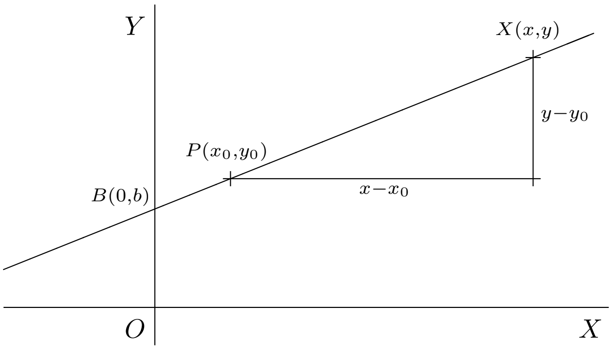
$$y=y_0+m(x-x_0)$$

esta forma de escribir la ecuación de la recta se llama forma **punto-pendiente** de la ecuación.

Quitando el paréntesis y operando, se obtiene una ecuación del tipo:

$$y = mx + b$$

que se llama ecuación de la recta en forma **explícita**. El término independiente b se llama **ordenada en el origen** y es el valor de y para x igual a cero, esto es, la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas.

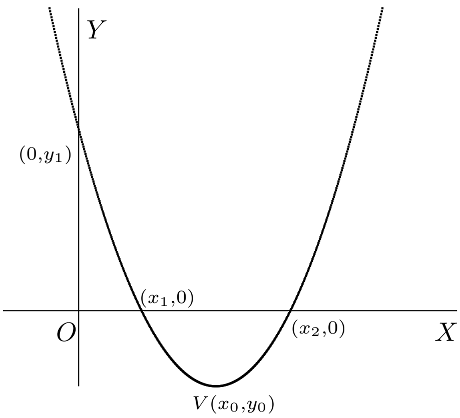


Las **rectas paralelas al eje de abscisas** cumplen una ecuación del tipo $y = y_0$ donde y_0 es una constante. En particular, la ecuación del eje OX es $y = 0$. Estas rectas son la gráfica de **funciones constantes**.

Las **rectas paralelas al eje de ordenadas** cumplen una ecuación del tipo $x = x_0$ y la ecuación del eje de ordenadas es $x = 0$. Estas rectas no representan funciones.

La ecuación de la **bisectriz** del primer cuadrante es $y = x$ y la del segundo cuadrante es $y = -x$

3. Función cuadrática. La parábola



Una ecuación de primer grado en y y de segundo grado en x puede escribirse en la forma $y = ax^2 + bx + c$ y define una función que recibe el nombre de **función cuadrática**. La representación gráfica de esta función es una **parábola** con su eje de simetría paralelo al eje de ordenadas. Según que el coeficiente a sea positivo o negativo, la curva tendrá un mínimo o un máximo en el vértice.

Para dibujar la curva, se obtienen en primer lugar sus **intersecciones con los ejes**. Estos puntos se obtienen resolviendo los sistemas formados por la ecuación de la curva y las ecuaciones de los ejes de coordenadas, es decir, resolviendo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ax^2 + bx + c \\ y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ax^2 + bx + c \\ x & = & 0 \end{array} \right.$$

La parábola siempre tiene un único punto de intersección con el eje de ordenadas. Con el eje de abscisas puede tener dos, uno o ningún punto de corte. El **vértice** de la parábola $V(x_0, y_0)$ se obtiene a partir de:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \qquad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

Si la parábola tiene intersección con el eje de abscisas, el polinomio $ax^2 + bx + c$ tiene raíces y por consiguiente puede factorizarse. Si tiene dos raíces x_1 y x_2, la ecuación de la parábola puede escribirse en la forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. Si tiene una sola raíz x_{12}(un solo punto de corte con el eje de abscisas), se escribe factorizada como $y = a(x - x_{12})^2$.

Conocidas las coordenadas del vértice (x_0, y_0), la ecuación de la parábola se expresa como suma o diferencia de cuadrados en la forma:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

4. Función de proporcionalidad inversa. La hipérbola

Las funciones definidas mediante ecuaciones del tipo:

$$y = \frac{K}{cx + d} \qquad \text{ó} \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

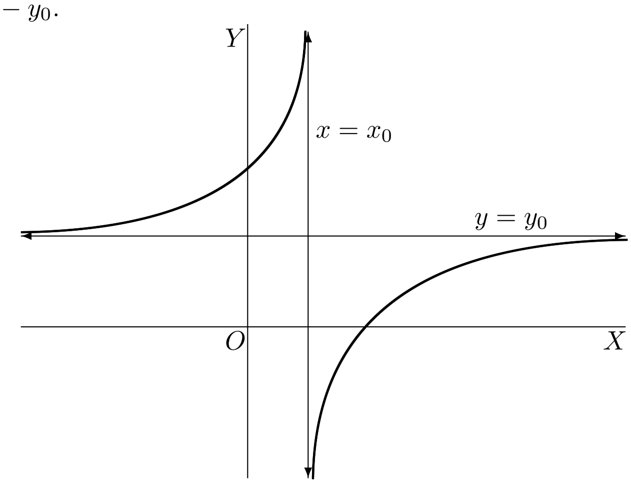
se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** y la curva correspondiente es una **hipérbola**. Esta curva puede dibujarse calculando sus intersecciones con los ejes:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ & & \\ y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ & & \\ x & = & 0 \end{array} \right.$$

y sus **asíntotas**. Más adelante se verá cómo se pueden obtener las asíntotas de cualquier curva. Para la función de proporcionalidad inversa pueden obtenerse la asíntota vertical igualando a cero el denominador y la asíntota horizontal dividiendo los coeficientes de x:

$$\text{asíntota horizontal: } y = \frac{a}{c} \qquad \qquad \text{asíntota vertical: } x = \frac{-d}{c}$$

Conocidas las asíntotas $x = x_0$ e $y = y_0$, la ecuación de la hipérbola puede escribirse en la forma $(x - x_0)(y - y_0) = K$ donde se ve que las magnitudes inversamente proporcionales son $x - x_0$ e $y - y_0$.

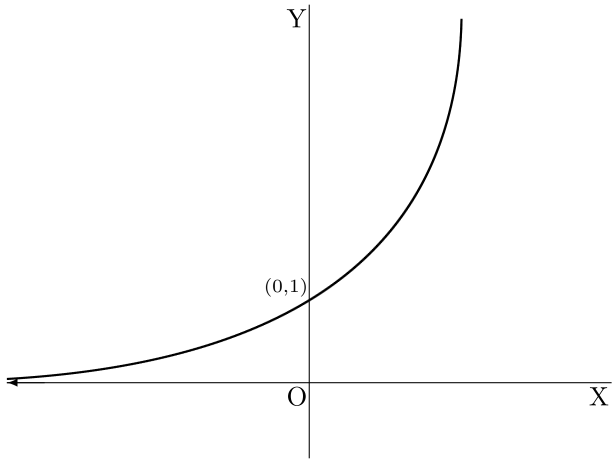


5. Funciones exponenciales y logarítmicas

5.1. Funciones exponenciales

Las funciones definidas por $y = a^x$ donde a es un número positivo cualquiera se llaman **funciones exponenciales**. Sea cual sea el valor de a, la función puede la exponencial puede escribirse en la base e, es decir como $y = e^{kx}$ con k positivo o negativo. Como características más importantes de estas funciones destaquemos las siguientes:

- Sea cual sea el valor de x, e^{kx} es positivo
- El eje de abscisas, esto es la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $y = e^{kx}$ en $-\infty$ o $+\infty$ según sea k positivo o negativo
- La curva $y = e^{kx}$ no corta al eje de abscisas. Corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 1)$



5.2. Funciones logarítmicas

Se llaman así las funciones definidas por $y = \log_a x$. Con ayuda de la fórmula del cambio de base de los logaritmos, cualquier función logarítmica puede expresarse como $y = k \cdot \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano o sea el logaritmo en la base e. Como propiedades fundamentales de estas funciones citaremos:

- Las funciones logarítmicas solo existen para x positivo
- La recta $x = 0$ (el eje de ordenadas) es asíntota vertical de $y = k \cdot \ln x$
- La curva $y = k \cdot \ln x$ no corta al eje de ordenadas. Corta al eje de abscisas en $(1, 0)$