ECUACIONES

Jesús García de Jalón de la Fuente

1. Polinomios

Los **polinomios** son expresiones del tipo:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

en donde aparecen indicadas sumas y diferencias de productos de números (**coeficientes**) por potencias de x (**indeterminada**). El **grado** del polinomio es el mayor exponente de x que aparece en el polinomio.

Si se sustituye la indeterminada x por un número a y se efectúan las operaciones, se obtiene un número que recibe el nombre de **valor numérico** del polinomio $P(x)$ para $x = a$ y se representa por $P(a)$. Si el valor numérico del polinomio para $x = a$ es cero, entonces a es una **raíz** del polinomio:

$$a \text{ es una raíz del polinomio } P(x) \Longleftrightarrow P(a) = 0$$

Si un polinomio se puede descomponer como producto de polinomios de grado inferior es **compuesto**. En caso contrario es **primo**. Son primos todos los polinomios de primer grado y los de segundo que no tienen raíces. Todos los demás polinomios son compuestos. Sobre descomposición factorial de polinomios se cumple el siguiente teorema:

Teorema del factor Si a es una raíz del polinomio $P(x)$, este polinomio es divisible por $x - a$ ($x - a$ es un factor del polinomio):

$$a \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$$

Este teorema permite descomponer en factores un polinomio cuando se conocen sus raíces. Para encontrar las raíces enteras de un polinomio conviene tener presente la propiedad siguiente:

Propiedad: Las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente.

2. Ecuaciones

Las **ecuaciones** son igualdades en las que aparecen uno o varios números desconocidos que se llaman **incógnitas**. La igualdad solo se cumple para determinados valores de las incógnitas que son las **soluciones** de la ecuación. Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman **equivalentes**. Las siguientes transformaciones no cambian las soluciones de la ecuación (la transforman en otra equivalente):

- Si se les suma a los dos miembros de la igualdad el mismo número, resulta una ecuación equivalente. Esto permite transponer sumandos de un lado al otro del signo igual cambiando el signo más por menos y viceversa.

- Si se multiplican los dos miembros de la igualdad por el mismo número resulta una ecuación equivalente. Esta propiedad permite quitar los denominadores de una ecuación multiplicando los dos miembros de la igualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores. Si un miembro de la ecuación está descompuesto en factores, éstos pueden pasarse dividiendo al otro miembro.

3. Ecuación de segundo grado

La ecuación de segundo grado tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La incógnita x se despeja con la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación. Dependiendo del signo del discriminante la ecuación puede tener dos, una o ninguna solución. Como hemos señalado anteriormente, el polinomio de segundo grado se podrá factorizar en el caso de que la ecuación tenga solución o será primo en caso contrario. Todos estos resultados se resumen en el siguiente esquema:

DISCRIMINANTE	RAÍCES	FACTORIZACIÓN
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	x_1, x_2	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	x_{12}	$ax^2 + bx + c = a(x - x_{12})^2$
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$	no hay raíces	no se puede factorizar

No es preciso utilizar la fórmula para despejar x en el caso de las ecuaciones de segundo grado incompletas, es decir, ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ o $ax^2 + bx = 0$. En el primer caso puede despejarse x^2 y obtener seguidamente las raíces cuadradas. En el segundo caso, se puede descomponer en factores el polinomio sacando factor común y obtener las raíces igualando a cero cada uno de los factores.

4. Otras ecuaciones

Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Si en esta ecuación cambiamos el nombre de la incógnita llamando $x^2 = t$ (y por consiguiente $x^4 = t^2$), resulta una ecuación de segundo grado que puede resolverse por el procedimiento descrito en la sección anterior. Por tanto:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las ecuaciones bicuadradas pueden tener hasta cuatro soluciones. Tienen la propiedad de que si x_1 es una solución, también lo es $-x_1$.

Ecuaciones de grado superior al segundo

Las ecuaciones de grado superior al segundo deben intentarse resolver factorizando el polinomio e igualando a cero cada uno de los factores resultantes. para ello debe aplicarse el teorema del factor y la propiedad de las raíces enteras que se vieron anteriormente.

Ecuaciones irracionales

Se llaman así las ecuaciones en que la incógnita se encuentra bajo el signo de raíz. Suponiendo que se trata de una raíz cuadrada, despejándola y elevando los dos miembros de la igualdad al cuadrado, se obtiene una ecuación sin raíces. Esta ecuación no es en general equivalente a la que se tenía antes de elevar al cuadrado sino que, además de las soluciones de la ecuación original, puede tener alguna más. Por ello, es necesario comprobar que las soluciones de esta segunda ecuación, lo son también de la primera (que es la que se trataba de resolver).

5. Inecuaciones

Las desigualdades cumplen las siguientes propiedades:

- Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma el mismo número, resulta una desigualdad del mismo sentido. Esto permite transponer sumandos de un lado al otro de la desigualdad cambiando el signo más por menos y viceversa.
- Si se multiplican los dos miembros de la igualdad por el mismo número positivo resulta una desigualdad del mismo sentido. Si se multiplican por un número negativo, resulta una desigualdad de sentido contrario.

Estas propiedades permiten transponer términos, quitar denominadores, etc, en una inecuación, lo mismo que en una ecuación. El procedimiento general para resolver una inecuación del tipi $P(x) < 0$ (o $P(x) \leq 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$) es el siguiente:

1. Calcular las raíces de polinomio $P(x)$
2. Calcular el signo del polinomio en cada uno de los intervalos en que estos números dividen la recta real
3. Obtener la solución de la inecuación

Para inecuaciones del tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$ o similares, el procedimiento es el mismo calculando las raíces del polinomio numerador y del polinomio denominador.

6. Ejercicios teóricos

1. Demostrar el *teorema del resto:* el valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = a$ es igual al resto de dividir $P(x)$ por $x - a$.
2. A partir del teorema anterior, demostrar el *teorema del factor:* si a es una raíz del polinomio $P(x)$, éste es divisible por $x - a$ ($x - a$ es un factor de $P(x)$).
3. Demostrar que el polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ puede escribirse en la forma $a(x - x_0)^2 + y_0$, calculando los valores de x_0 e y_0 en función de a, b y c.
4. Utilizar el resultado obtenido en el ejercicio anterior para demostrar la fórmula que resuelve la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Demostrar a partir del teorema del factor que si x_1 y x_2 son raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, éste se puede descomponer en factores como $a(x - x_1)(x - x_2)$.

6. Demostrar que las dos raíces x_1 y x_2 de un polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ cumplen que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad\qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

7. Demostrar la fórmula que resuelve la ecuación bicuadrada:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$