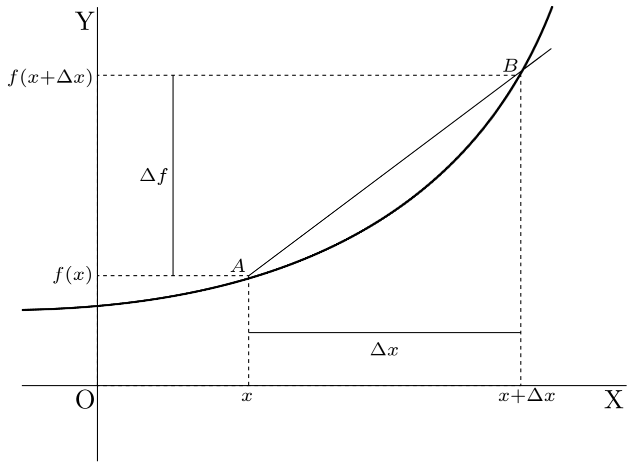
DERIVADAS

Jesús García de Jalón de la Fuente

1. Función derivada

La **tasa de variación media** de una función en un intervalo, o **pendiente media** de la curva correspondiente se define como el cociente de los incrementos de la función y de la variable entre los dos puntos de la curva:



$$m_{AB} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La **tasa de variación instantánea** de una función o **pendiente de la curva** en un punto es la tasa de variación media entre dos puntos cuando la distancia entre ellos tiende a cero, es decir, el límite de la expresión anterior cuando Δx tiende a cero:

$$m_A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

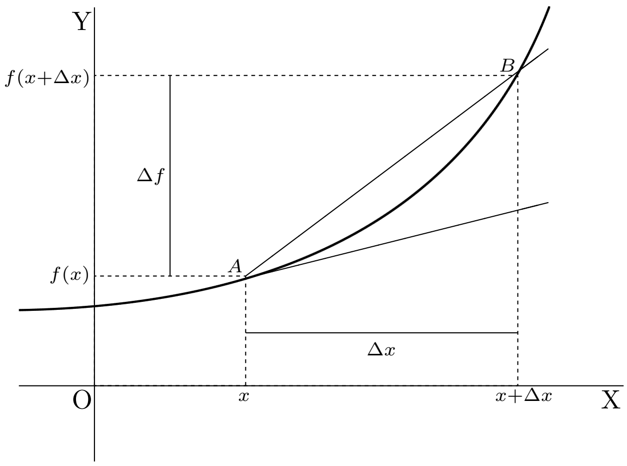
La **tangente** a una curva en un punto A es la recta que une dos puntos de la curva A y B cuando la distancia entre ambos tiende a cero. La pendiente media de una curva entre dos puntos A y B, es la pendiente de la recta que une los dos puntos de la curva. Al aproximarse los dos puntos, la pendiente media pasa a ser la pendiente en el punto A, y la recta AB se transforma en la tangente a la curva en el punto A. La pendiente de una curva es la pendiente de la recta tangente a la curva.

La **derivada** de la función $f(x)$ en un punto cualquiera x se define como el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

este límite considerado como función de x se llama **función derivada** de $f(x)$. La derivada de la función $f(x)$ se representa por $f'(x)$ y también por $Df(x)$ o $\frac{df}{dx}$.

La derivada de una función debe interpretarse geométricamente como la pendiente de la curva que representa la función o como la pendiente de la recta tangente a esa curva.



Toda función derivable en un punto es continua en ese punto puesto que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) \cdot \Delta x = 0$$

Puesto que la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada de la función en el punto, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 (y ordenada $f(x_0)$) es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2. Reglas de derivación

REGLAS GENERALES	FUNCIONES SIMPLES	FUNCIONES COMPUESTAS
$D\left[u \pm v\right] = u' \pm v'$	$D\left[K\right] = 0$	
$D\left[K \cdot u\right] = K \cdot u'$	$D\left[x^n\right] = n \cdot x^{n-1}$	$D\left[u^n\right] = n \cdot x^{n-1} \cdot u'$
$D\left[u \cdot v\right] = u'v + v'u$	$D\left[\ln x\right] = \dfrac{1}{x}$	$D\left[\ln u\right] = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$D\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$D\left[\log_a x\right] = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$D\left[\log_a u\right] = \dfrac{1}{x \cdot \ln a} \cdot u'$
$D\left[f\left(u(x)\right)\right] = f'(u) \cdot u'(x)$	$D\left[e^x\right] = e^x$	$D\left[e^u\right] = e^u \cdot u'$
	$D\left[a^x\right] = a^x \cdot \ln a$	$D\left[a^u\right] = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

3. Funciones crecientes y decrecientes

Una función $f(x)$ es **creciente** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor mayor que en los puntos próximos situados a su izquierda y menor que en los puntos próximos situados a su derecha:

$$f \text{ creciente en } x_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < x_0 & \text{entonces} \quad f(x) < f(x_0) \\ \text{si } x > x_0 & \text{entonces} \quad f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

Una función $f(x)$ es bf decreciente en el punto x_0 si en ese punto toma un valor menor que en los puntos próximos situados a su izquierda y mayor que en los puntos próximos situados a su derecha:

$$f \text{ decreciente en } x_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < x_0 & \text{entonces} \quad f(x) > f(x_0) \\ \text{si } x > x_0 & \text{entonces} \quad f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

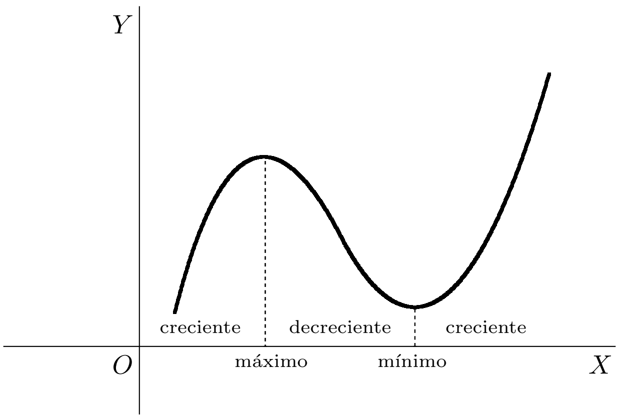
Teorema: si la derivada de la función $f(x)$ es positiva (negativa) en x_0, la función es creciente (decreciente) en x_0:

$$\begin{array}{lll} \text{si } f'(x_0) > 0 & \text{entonces} & f \text{ creciente en } x_0 \\ \text{si } f'(x_0) < 0 & \text{entonces} & f \text{ decreciente en } x_0 \end{array}$$

La función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor mayor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

Una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor menor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

Teorema 1: si x_0 es un máximo o un mínimo relativo, $f'(x_0) = 0$
Teorema 2: si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, x_0 es un máximo relativo.
Teorema 3: si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, x_0 es un mínimo relativo.



4. Concavidad y convexidad

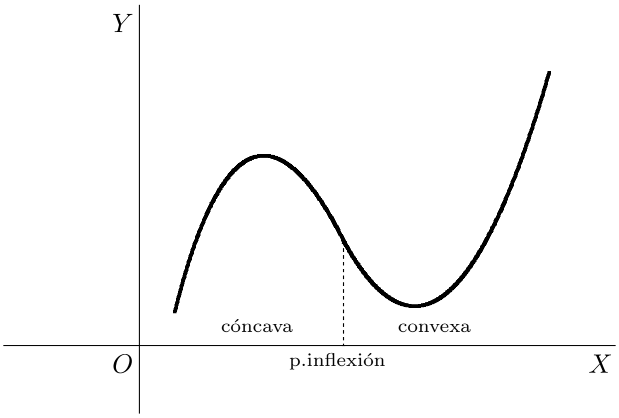
Una función $f(x)$ es **convexa** en el punto x_0 si en los puntos próximos a x_0 la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 queda por debajo de ella:

$$f \text{ convexa en } x_0 \Rightarrow f(x) - y_t = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] > 0$$

Una función $f(x)$ es **cóncava** en el punto x_0 si en los puntos próximos a x_0 la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 queda por encima de ella:

$$f \text{ cóncava en } x_0 \Rightarrow f(x) - y_t = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] < 0$$

Teorema 1: si $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es convexa en x_0
Teorema 2: si $f''(x_0) < 0$, la función $f(x)$ es cóncava en x_0



Los puntos en que la función no es cóncava ni convexa se llaman **puntos de inflexión** de la función. En esos puntos la derivada segunda es igual a cero.

Teorema: si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, x_0 es un punto de inflexión.