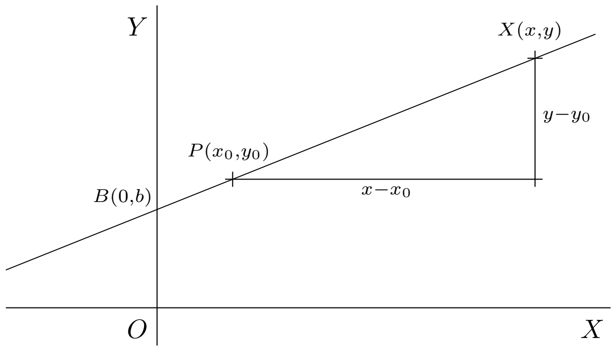
Cálculo

1. Función de primer grado. La recta.

Consideremos una función definida mediante una línea recta:



Sea $P(x_0, y_0)$ un punto de la recta que suponemos conocido y $X(x, y)$ un punto cualquiera de la recta. Llamamos pendiente de la recta al cociente de las variaciones de y y de x entre dos puntos de la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Quitando denominadores en esta igualdad resulta una ecuación de la forma:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

Todos los puntos de la recta que pasa por $P(x_0, y_0)$ y tiene por pendiente m cumplen esta ecuación. Esta forma de escribir la ecuación de una recta se llama ecuación de la recta en la forma punto-pendiente.

Despejando y en la ecuación punto-pendiente, se obtiene una ecuación de la forma

$$y = mx + b$$

que se llama ecuación de la recta en forma explícita. El coeficiente de x es la pendiente de la recta m. El término independiente b se llama ordenada en el origen y es la ordenada del punto de corte de la recta con el eje OY (eje de ordenadas).

Ejemplo 1 *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(1, -2)$ *y tiene pendiente* 3.

Sustituyendo en la ecuación punto-pendiente x_0 e y_0 por las coordenadas del punto que nos dan y la pendiente m por 3, resulta la ecuación:

$$y - (-2) = 3\,(x - 1)$$

Esta es la ecuación de la recta que nos piden en la forma punto-pendiente. para calcular la ecuación explícita, basta despejar y:

$$y = 3x - 3 - 2 \quad \Longrightarrow \quad y = 3x - 5$$

Las rectas paralelas al eje de abscisas tienen pendiente cero. Estas rectas cumplen una ecuación del tipo $y = y_0$ donde y_0 es una constante. En particular, la ecuación del eje OX es $y = 0$. estas funciones se llaman **funciones constantes**.

Las rectas paralelas al eje de ordenadas cumplen una ecuación del tipo $x = x_0$ y la ecuación del eje de ordenadas es $x = 0$.

Ejemplo 2 *Calcular la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, -1)$.*

Calculamos en primer lugar la pendiente de la recta como el cociente de las variaciones de y y de x entre los dos puntos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-1)}{-1-2} = \frac{4}{-3} = -\frac{3}{4}$$

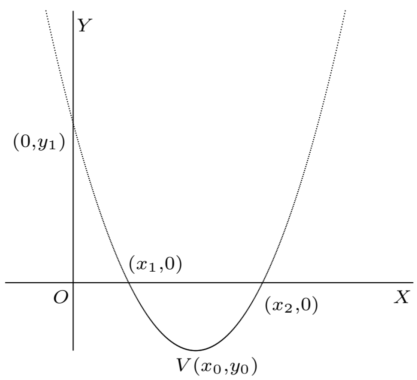
Ya conocemos la pendiente. Como conocemos también que el punto A (y el B) pertenecen a la recta, podemos escribir la ecuación punto-pendiente:

$$y - 2 = -\frac{3}{4}\,(x - (-1)) \quad \Longrightarrow \quad y - 2 = -\frac{3}{4}\,(x + 1)$$

despejando y se obtiene la ecuación explícita:

$$y = -\frac{3}{4}\,x - \frac{3}{4} + 2 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{3}{4}\,x + \frac{5}{4}$$

2. Función cuadrática. La parábola.



La función definida por una ecuación de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

define una función que recibe el nombre de **función cuadrática**. La representación gráfica de esta función es una **parábola** con su eje de simetría paralelo al eje de ordenadas. Según que el coeficiente a sea positivo o negativo, la curva tendrá un mínimo o un máximo en el vértice.

los puntos más importantes para dibujar la gráfica de la función son las intersecciones con los ejes y el vértice.

La parábola tiene siempre un punto de intersección con el eje de ordenadas que es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$$

De forma similar, la intersección con el eje OX se obtiene resolviendo el sistema formado por la ecuación de la parábola y la ecuación del eje OX:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

Este sistema puede tener dos, una o cero soluciones. O sea que la parábola puede cortar al eje de abscisas en dos, uno o ningún punto.

El vértice es el punto medio de las intersecciones con el eje de abscisas. se calcula mediante las fórmulas:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \qquad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

Ejemplo 3 *Representar gráficamente la función* $y = x^2 - 5x - 14$.

El punto de intersección con el eje de ordenadas es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 14 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(0, -14)$$

Los (posibles) puntos de intersección con el eje de abscisas se obtienen del sistema:

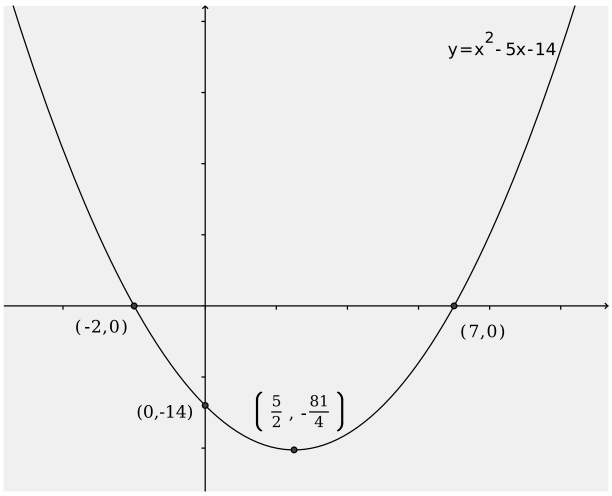
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 14 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

Hay dos puntos de intersección de abscisas -2 y 7. Los puntos son entonces $B_1(-2, 0)$ y $B_2(7, 0)$

El vértice tiene como coordenadas

$$x_0 = \frac{5}{2}; \qquad y_0 = \frac{25}{4} - 5 \cdot \frac{5}{2} - 14 = -\frac{81}{4}$$

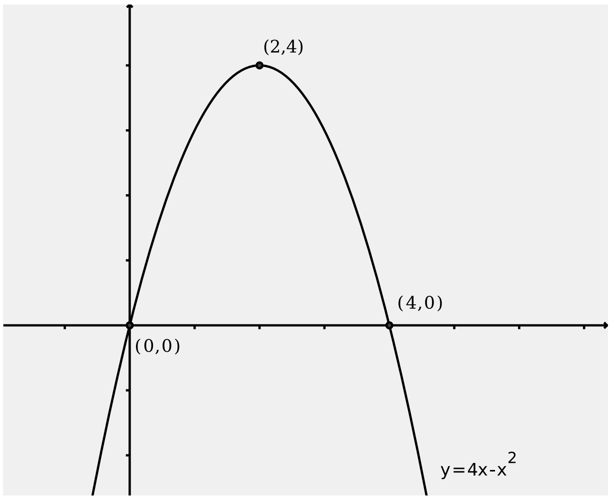
Con estos datos, la representación gráfica sería



Ejemplo 4 *Representar gráficamente la función* $y = 4x - x^2$.

Procediendo de forma similar al problema anterior resulta que la intersección con el eje OY es el punto $(0, 0)$, las intersecciones con el eje OX están en $(0, 0)$ y $(4, 0)$ y el vértice en $(2, 4)$.

La representación gráfica es:



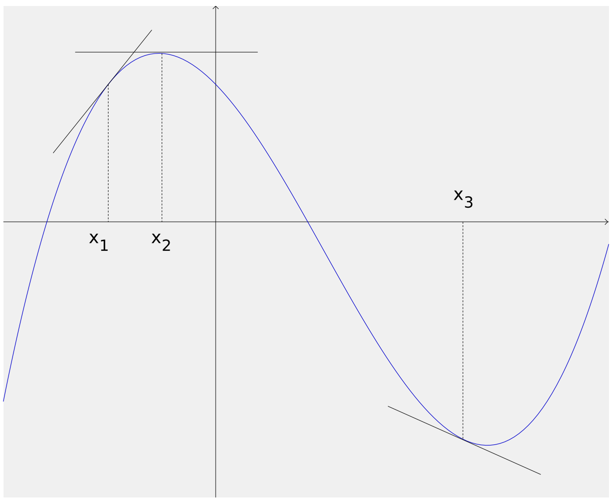
Obsérvese que, puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, la función presenta un máximo al contrario de lo que ocurría en el ejemplo anterior.

---

3. Derivada. Ecuación de la recta tangente.

Hemos visto que la pendiente de una recta es igual al cociente de las variaciones de y y de x entre dos puntos de la recta. En una curva, la pendiente varía de un punto a otro de tal forma que la pendiente de la curva no es un número sino una función que depende del punto. Por definición, la pendiente de una curva en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Por ejemplo, en la curva de la figura, la pendiente es positiva en el punto x_1, es cero en x_2 y es negativa en x_3.



Si la curva está definida mediante la ecuación $y = f(x)$, la pendiente en cada punto es una función que se llama derivada de la función y se representa por y' o, si queremos poner de manifiesto que varía de un punto a otro, la representaremos por $f'(x)$.

Sea la función definida por $y = f(x)$. La ordenada y_0 del punto de la curva correspondiente a un valor x_0 se obtiene sustituyendo en la ecuación anterior:

$$y_0 = f(x_0)$$

Cuadro 1: REGLAS DE DERIVACIÓN

$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = e^u u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = ku$	$y' = ku'$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + v'u$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto de la curva de ecuación $y = f(x)$. Como sabemos, la pendiente de la curva en es punto, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, es $f'(x_0)$. Puesto que la tangente pasa por el punto $P(x_0, y_0)$ y tiene de pendiente $f'(x_0)$ podemos escribir su ecuación en forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Ejemplo 5 *Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en el punto de abscisa -1.*

La abscisa del punto de la curva en el que queremos calcular la tangente es $x_0 = -1$. Calculemos en primer lugar su ordenada sustituyendo en la ecuación de la curva:

$$y_0 = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -1 - 3 = -4$$

Debemos calcular la ecuación de la tangente en el punto $P(-1, -4)$. La pendiente es la derivada en $x = -1$. Calculamos la derivada:

$$y = x^3 - 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad y' = 3x^2 - 6x$$

La pendiente es:

$$m = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 9$$

Conocemos un punto $P(-1, -4)$ y la pendiente $m = 9$ de la recta tangente. La ecuación de esta recta es:

$$y + 4 = 9\,(x + 1)$$

En el ejemplo anterior hemos calculado la pendiente de la recta tangente a partir de la derivada. En el siguiente ejemplo, conocida la pendiente de la recta tangente calcularemos el punto de tangencia y, a partir de estos datos, la ecuación de la recta tangente.

Ejemplo 6 *Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 5x$ paralelas a la recta $y = 7x + 4$.*

Puesto que la tangente es paralela a $y = 7x + 4$ y rectas paralelas tienen la misma pendiente, deducimos que la pendiente de la recta tangente debe ser igual a 7.

La derivada es la pendiente de la curva. Calculamos la derivada e igualamos a 7 para obtener el punto en que la pendiente toma ese valor:

$$y' = 3x^2 - 5 = 7 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Para $x_1 = -2$, $y_1 = (-2)^3 - 5\,(-2) = 2$ y para $x_2 = 2$, $y_2 = 2^3 - 5 \cdot 2 = -2$.

Los puntos de tangencia son $P_1(-2, 2)$ y $P_2(2, -2)$. Puesto que la pendiente es 7, las ecuaciones de las dos tangentes son:

$$y - 2 = 7\,(x + 2); \qquad y + 2 = 7\,(x - 2)$$

---

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

La función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo si para puntos x_1, x_2 en ese intervalo:

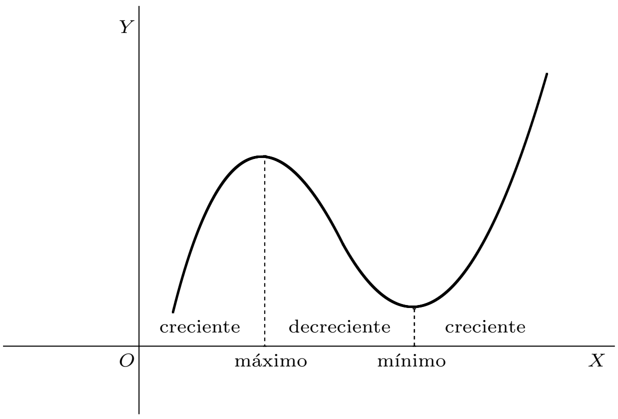
$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

De forma similar, $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo si para puntos x_1, x_2 en ese intervalo:

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

La función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor mayor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

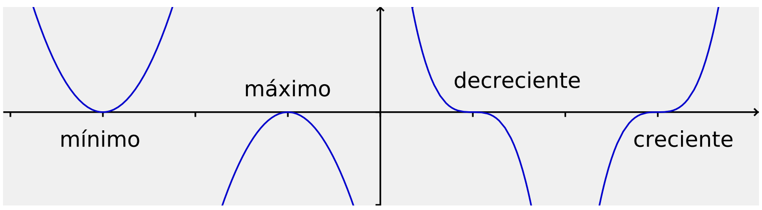
Una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor menor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.



El crecimiento y decrecimiento (la monotonía) de una función, se relaciona con la derivada de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & f \text{ creciente} \\ f'(x) < 0 & f \text{ decreciente} \\ f'(x) = 0 & \begin{cases} f''(x) < 0 & x \text{ máximo relativo} \\ f''(x) > 0 & x \text{ mínimo relativo} \\ f''(x) = 0 & \ ? \end{cases} \end{array}$$

Cuando las dos primeras derivadas en un punto son iguales a cero no puede conocerse el comportamiento de la función en ese punto. En cualquier caso se trata de un punto de la curva de tangente horizontal en el que pueden darse las cuatro posibilidades que se muestran en la siguiente figura.



Para averiguar de cuál de ellas se trata, puede recurrirse a las derivadas siguientes o analizar la función en los puntos próximos:

- ◇ Si la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha se trata de un mínimo.
- ◇ Si la función es creciente a la izquierda y creciente a la derecha se trata de un máximo.
- ◇ Si la función es decreciente a la izquierda y a la derecha, la función es también decreciente en el punto de derivada cero.
- ◇ Si la función es creciente a la izquierda y a la derecha, la función es también creciente en el punto de derivada cero.

Ejemplo 7 Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $12x - x^3$. A partir de estos datos representar gráficamente la curva.

- ◇ Calculamos en primer lugar las derivadas:

$$\begin{aligned} y' &= 12 - 3x^2 \\ y'' &= -6x \end{aligned}$$

- ◇ Puntos de tangente horizontal. Igualando a cero la primera derivada:

$$12 - 3x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Para ver si esto puntos son máximos o mínimos calculamos la segunda derivada:

$$\begin{aligned} y''(-2) = -6 \cdot (-2) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = -2 \quad \text{mínimo} \\ y''(2) = -6 \cdot 2 < 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = 2 \quad \text{máximo} \end{aligned}$$

Calculamos las ordenadas de estos puntos sustituyendo en la ecuación de la curva $y = 12x - x^3$. Asi obtenemos que el mínimo está en el punto $m(-2, -16)$ y el máximo en $M(2, 16)$.

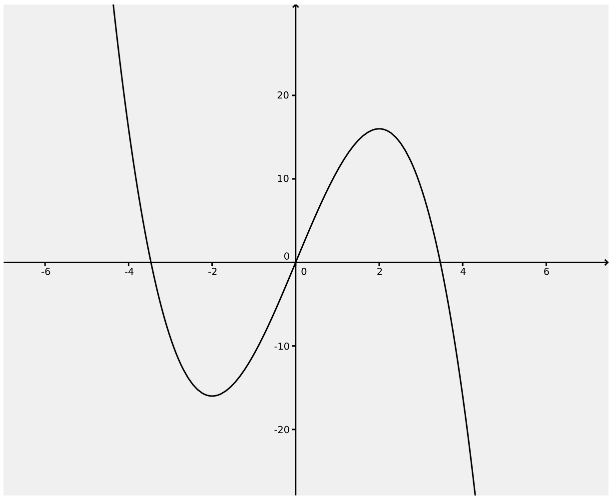
- ◇ Signo de la derivada. Con los datos obtenidos, el signo de la derivada en los distintos intervalos resulta ser:

y'	$-$	0	$+$	0	$-$
x		-2		2	

de forma que:

$x \in (-\infty, -2)$	decreciente
$x = -2$	mínimo
$x \in (-2, 2)$	creciente
$x = 2$	máximo
$x \in (2, \infty)$	decreciente

- ◇ Con estos datos, la gráfica de la función es:



Ejemplo 8 Estudiar la monotonía de la función $y = x^4 - 4x^3$ y representarla gráficamente.

- Derivadas:

$$y' = 4x^3 - 12x^2$$
$$y'' = 12x^2 - 24x$$

- Puntos de tangente horizontal. Igualamos a cero la primera derivada:

$$4x^3 - 12x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^2\,(x-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La derivada segunda en estos puntos es:

$$y''(0) = 0$$
$$y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 > 0$$

Así pues en $x = 3$ hay un mínimo. La ordenada de este punto es $y = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$.

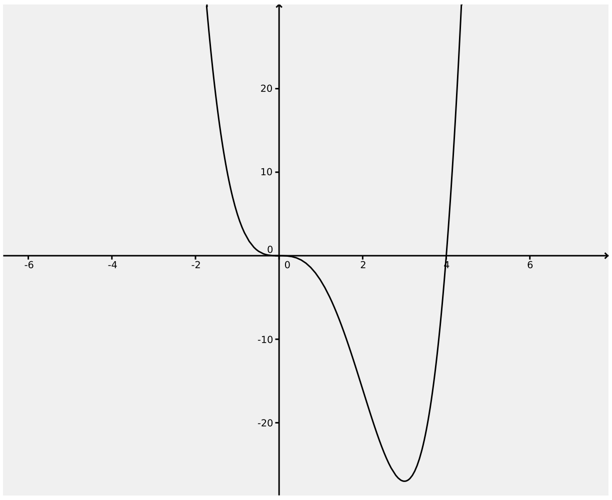
- Signo de la derivada:

$-$	0	$-$	0	$+$	y'
	0		3		x

Puesto que tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 0$ la función es decreciente, también es decreciente en ese punto. Así pues, tenemos:

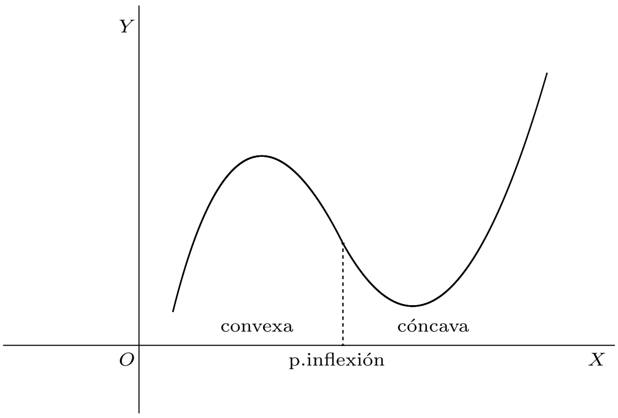
$x \in (-\infty, 3)$	decreciente
$x = 3$	mínimo
$x \in (3, \infty)$	creciente

- La gráfica es como sigue:



5. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Podemos clasificar los puntos de la gráfica de una función según que la tangente quede por encima o por debajo de la curva.



Si la tangente en un punto queda por encima de la curva, diremos que la función es **convexa** en ese punto y si queda por debajo diremos que la función es **cóncava**.

Cuando la función es cóncava, la curva se dobla hacia arriba, la pendiente de la curva, es decir, su derivada, es creciente. Por ello, cuando la derivada segunda sea mayor que cero, la derivada primera será creciente y la función será cóncava:

$$f''(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ es cóncava en } x$$

De forma similar, cuando la derivada segunda sea menor que cero, la función será convexa.

$$f''(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ es convexa en } x$$

Los puntos en que la función no es cóncava ni convexa se llaman **puntos de inflexión** de la función. En esos puntos la tangente atraviesa la curva, es decir, a un lado queda por encima y al otro por debajo. En estos puntos, la derivada segunda es igual a cero. Además se cumple que:

$$f''(x) = 0, \quad f'''(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \text{ es un punto de inflexión}$$

Ejemplo 9 Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en su punto de inflexión.

Para obtener el punto de inflexión calculamos las derivadas:

$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

Igualamos a cero la derivada segunda y obtenemos:

$$6x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

En este punto la derivada tercera es distinta de cero, así que podemos estar seguros de que se trata de un punto de inflexión. La ordenada de ese punto es:

$$y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$$

El punto de inflexión es $P(1, -2)$.

La pendiente de la recta tangente la obtenemos de la derivada primera:

$$m = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

Ya conocemos el punto y la pendiente, así que la ecuación de la tangente es:

$$y + 2 = -3\,(x - 1)$$

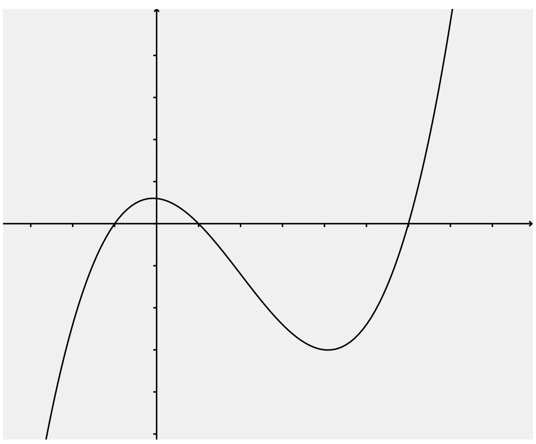
---

6. Límites. Asíntotas.

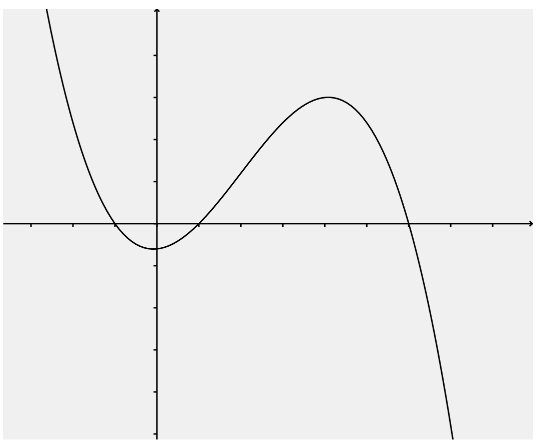
⧫ Límites cuando la variable tiende a infinito

Los límites cuando x tiende a infinito o menos infinito proporcionan información del comportamiento de la función cuando la variable toma valores muy grandes ($x \to \infty$) o muy pequeños ($x \to -\infty$).

Nos vamos a encontrar los siguientes casos: los límites pueden ser infinitos de uno u otro signo

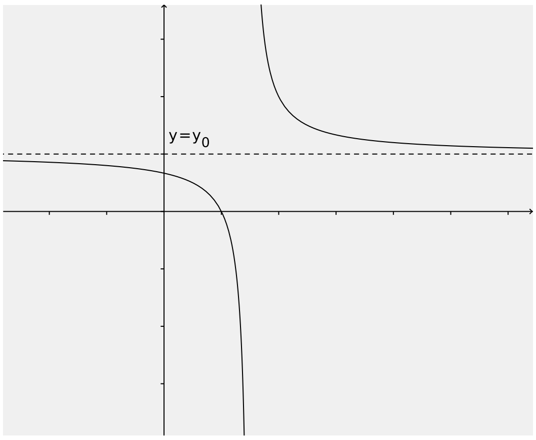


$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

o pueden ser finitos:



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$$

⧫ Cálculo de límites cuando x tiende a infinito.

Para calcular estos límites pueden aplicarse las siguientes reglas generales:

$$\infty + \infty = \infty \qquad \infty \pm a = \infty \qquad \infty \cdot k = \infty \ (k \neq 0)$$

$$\frac{k}{0} = \infty \ (k \neq 0) \qquad \frac{\infty}{k} = \infty \qquad \frac{k}{\infty} = 0$$

$$\infty^k = \begin{cases} \infty \ (k > 0) \\ 0 \quad (k < 0) \end{cases} \qquad r^\infty = \begin{cases} \infty \ (r > 1) \\ 0 \quad (0 \leq r < 1) \end{cases}$$

Los límites a los que no son aplicables estas reglas se llaman casos de indeterminación. Son los siguientes:

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 1^\infty, \qquad \infty^0, \qquad 0^0$$

Para funciones polinómicas y funciones racionales las indeterminaciones se resuelven teniendo en cuenta que el término de mayor grado es infinitamente mayor que el resto y, por consiguiente, es el único a tener en cuenta como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10 Calcular los siguientes límites:

- ◇ $\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 50 = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$
- ◇ $\lim_{x\to\infty} x^2 - 5x^4 = \lim_{x\to\infty} -5x^4 = -\infty$
- ◇ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 5}{5x^2 + 3x - 1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{5x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{5} = \infty$
- ◇ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{1 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{-x^2} = -3$
- ◇ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4}{2x^3 - x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$

En general, para funciones racionales, es decir, funciones del tipo

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, el limite es:

- $\diamond$ ∞ si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$.
- $\diamond$ 0 si el grado de $Q(x)$ es mayor que el grado de $P(x)$.
- $\diamond$ El cociente de los términos de mayor grado si el grado de $P(x)$ es igual que el grado de $Q(x)$.

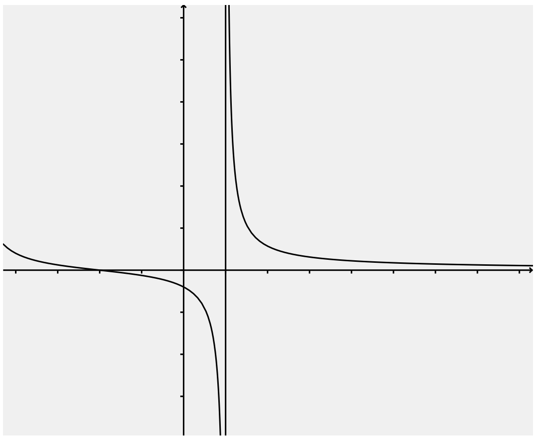
⧫ Límites cuando la variable tiende a un número finito.

Las funciones con las que trabajamos son normalmente continuas. Esto quiere decir que el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Así pues para calcular los límites de una función cuando la variable x tiende a un número x_0, basta sustituir x por x_0 en la expresión de la función.

Si la función está definida por una fracción, en los puntos en que el denominador se haga cero y el numerador sea distinto de cero, el límite es infinito:



$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2+4x-5} = \infty$$

Si al sustituir el valor de la variable, tanto el numerador como el denominador se hacen cero, se trata de un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. En el caso de funciones racionales, puede resolverse la indeterminación simplificando la fracción o, también, aplicando la regla de l'Hopital que consiste en derivar numerador y denominador.

Ejemplo 11 Calcular los siguientes límites:

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{(-1)^2+3}{-1-1} = -2$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{x^2-1}{x^2-6x+5} = \frac{25-1}{25-30+5} = \frac{24}{0} = \infty$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{1-1}{1-3+2} = \frac{0}{0}$

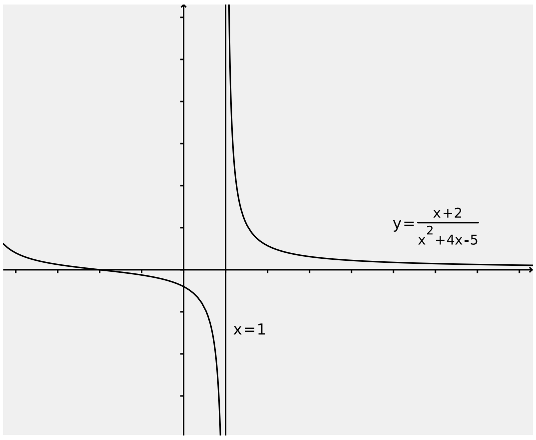
  Para resolver la indeterminación derivamos numerador y denominador:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{2x-3} = \frac{2}{2-3} = -2$$

⧫ Asíntotas.

Cuando el límite de la función en un punto es infinito, la gráfica de la función se aproxima a una recta que se llama asíntota vertical de la función:

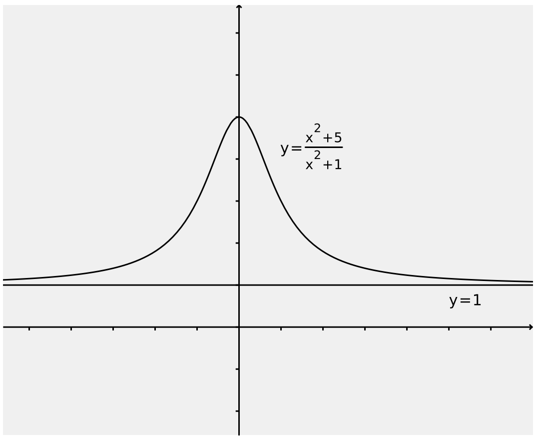
$$x = x_0 \text{ asíntota vertical de } f(x) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$



$$x = 1 \text{ asíntota vertical de } y = \frac{x+2}{x^2+4x-5} \text{ porque } \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+4x-5} = \infty$$

Si cuando la variable tiende a infinito la función tiene un límite finito, para valores grandes de x, la curva se aproxima a una recta que se llama asíntota horizontal de la función:

$$y = y_0 \text{ asíntota horizontal de } f(x) \iff \lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$$



$$y = 1 \text{ asíntota horizontal de } y = \frac{x^2+5}{x^2+1} \text{ porque } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^2+1} = 1$$

La gráfica de algunas funciones se aproxima a rectas oblicuas cuando x tiende a infinito. Estas rectas se llaman asíntotas oblicuas de la función. Las asíntotas oblicuas se calculan mediante los siguientes límites:

$$y = mx + b \text{ asíntota oblicua de } f(x) \iff \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx \end{cases}$$

Ejemplo 12 Calcular la asíntota oblicua de la curva

$$y = \frac{x^3 + x^2 + 7}{x^2 + 1}$$

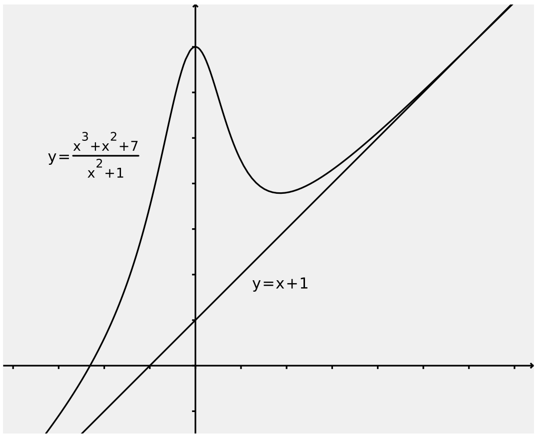
La pendiente de la asíntota es:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+x^2+7}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+7}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

y la ordenada en el origen:

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x^2+7}{x^2+1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+7-x^3-x}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$.



A veces se piensa que la curva no puede cortar a la asíntota. Esto no es cierto. Aunque no se aprecia bien en la figura, la curva corta a la asíntota y se va acercando después desde abajo.

Ejemplo 13 Se considera la función:

$$y = \frac{x}{x^2+5x+4}$$

Calcular:

- ◇ Intersecciones con los ejes y asíntotas.
- ◇ Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- ◇ Representación gráfica.

Solución:

- ◇ Las intersecciones con los ejes son la solución de los sistemas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{x^2+5x+4} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{x}{x^2+5x+4} \\ y = 0 \end{cases}$$

En este caso hay un solo punto de intersección $(0,0)$.

El denominador de la fracción se anula para $x = -1$ y $x = -4$. Éstas son las asíntotas verticales de la función. La asíntota horizontal es $y = 0$ puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+5x+4} = 0$$

◇ Calculemos la derivada de la función:

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 5x + 4) - x \cdot (2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2}$$

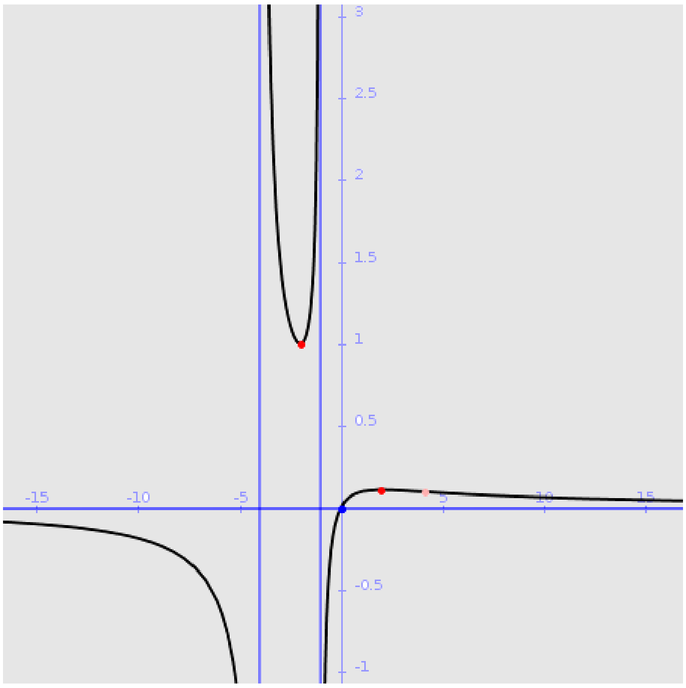
La derivada se anula para $x = -2$ y $x = 2$. Tenemos el siguiente esquema de signos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \nexists & & 0 & & \nexists & & 0 & & y' \\ & - & & - & & + & & + & & - & \\ \hline & & -4 & & -2 & & -1 & & 2 & & x \end{array}$$

Es decir:

$x \in (-\infty, -4)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = -4$	no existe la función	asíntota
$x \in (-4, -2)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = -2$	$y' = 0$	mínimo
$x \in (-2, -1)$	$y' > 0$	f creciente
$x = -1$	no existe la función	asíntota
$x \in (-1, 2)$	$y' > 0$	f creciente
$x = 2$	$y' = 0$	máximo
$x \in (2, \infty)$	$y' < 0$	f decreciente

◇ La gráfica de esta función aparece en la siguiente figura:



7. Primitivas de una función. Integral indefinida

Una primitiva de la función $f(x)$ es otra función que derivada da $f(x)$:

$$F(x) \text{ primitiva de } f(x) \iff F'(x) = f(x)$$

Por ejemplo, x^3 es una primitiva de $3x^2$ porque derivando x^3 se obtiene $3x^2$.

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también lo es $F(x)+C$ ya que, puesto que la derivada de una constante es igual a cero, $F(x)$ y $F(x)+C$ tienen la misma derivada. Una función tiene infinitas primitivas que difieren en una constante. Al conjunto de todas las primitivas de una función se llama integral indefinida de la función y se representa por

$$\int f(x)\ dx$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces

$$\int f(x)\ dx = F(x)+C$$

donde C es una constante arbitraria.

De las propiedades de las derivadas se deducen las siguientes propiedades de las integrales:

$$\int k\ f(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$$

$$\int (f(x)+g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

De las reglas de derivación se deducen las siguientes reglas para calcular integrales indefinidas:

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int (ax+b)^n\ dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\ dx = \ln(ax+b)\cdot\frac{1}{a}+C$$

$$\int \frac{u'}{u}\ dx = \ln u + C$$

$$\int e^x\ dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b}\ dx = e^{ax+b}\cdot\frac{1}{a}+C$$

Ejemplo 14 Calcular las siguientes integrales:

- ◇ $\displaystyle\int \left(2x^3-4x^2+x-5\right)\ dx = \frac{2x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-5x+C$
- ◇ $\displaystyle\int (3x-2)^4\ dx = \frac{(3x-2)^5}{5}\cdot\frac{1}{3}+C$
- ◇ $\displaystyle\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$
- ◇ $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\ dx = \int (x-1)^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}+C$
- ◇ $\displaystyle\int \sqrt{2x+3}\ dx = \int (2x+3)^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}+C = \frac{2\sqrt{(2x+3)^3}}{3}\cdot\frac{1}{2}+C$

- $\displaystyle\int \frac{5}{x^2}\,dx = \int 5x^{-2}\,dx = \frac{5x^{-1}}{-1} + C = \frac{-5}{x} + C$
- $\displaystyle\int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln x + C$
- $\displaystyle\int \frac{2}{5x+1}\,dx = 2\ln(5x+1)\cdot\frac{1}{5} + C$
- $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}\,dx = \ln(x^2+3x-1) + C$
- $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-2x+6}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+6}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+6) + C$
- $\displaystyle\int 3e^x\,dx = 3\,e^x + C$
- $\displaystyle\int 5e^{2x}\,dx = 5\,e^{2x}\cdot\frac{1}{2} + C$
- $\displaystyle\int e^{-x}\,dx = e^{-x}\cdot\frac{1}{-1} + C = -e^{-x} + C$

---

8. Integral definida

La integral definida de la función $f(x)$ entre los extremos a y b es igual a la diferencia entre los valores que toma una primitiva de $f(x)$ en los puntos b y a (regla de Barrow):

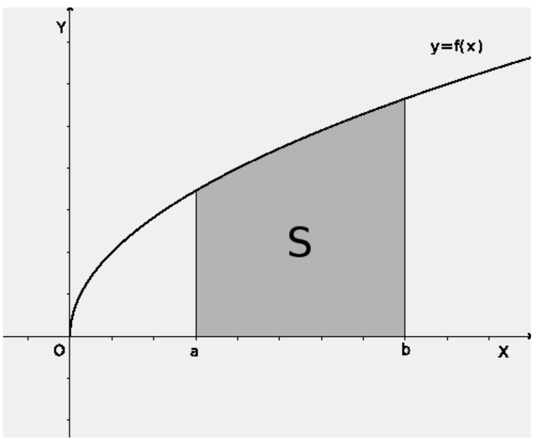
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 15 Calcular las siguientes integrales definidas:

- $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2-2x+3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 4 + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 3\right) = 9$
- $\displaystyle\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right]_{-1}^{3} = \left(\frac{2\sqrt{4^3}}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}$

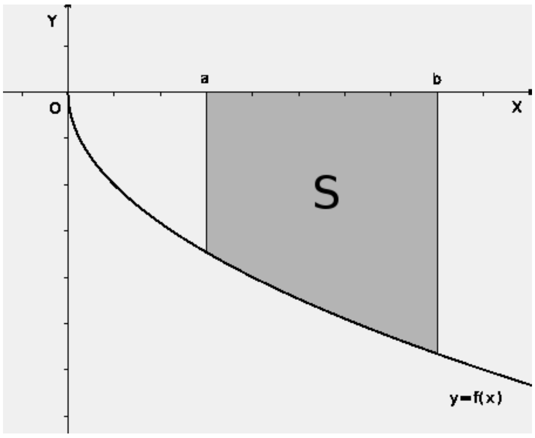
La integral definida representa el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ con signo más o menos dependiendo de que la función sea positiva o negativa en el intervalo $[a, b]$. Pueden darse los siguientes casos:

- Si la función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$, la integral definida coincide con el área:



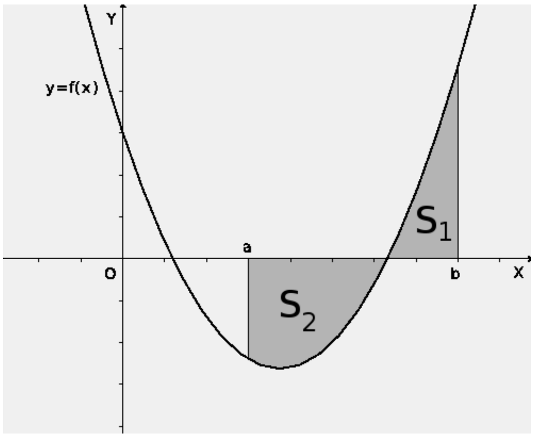
$$\int_a^b f(x)\,dx = S$$

◇ Si $f(x)$ es negativa en el intervalo, la integral es igual al área cambiada de signo:



$$\int_a^b f(x)\,dx = -S$$

◇ Si $f(x)$ cambia de signo en el intervalo $[a, b]$, la integral es la diferencia entre el área que queda por encima del eje de abscisas y la que queda por debajo.



$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2$$

Cuando queramos calcular el área del recinto sombreado, deberemos calcular por separado las áreas S_1 y S_2 y después sumarlas.

Ejemplo 16 Representar gráficamente la parábola $y = 3x^2 - x + 1$ y calcular el área comprendida entre esa curva, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

La parábola tiene como vértice el punto:

$$x_0 = \frac{1}{6}; \qquad y_0 = \frac{3}{36} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{11}{12} \quad \Longrightarrow \quad V\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$$

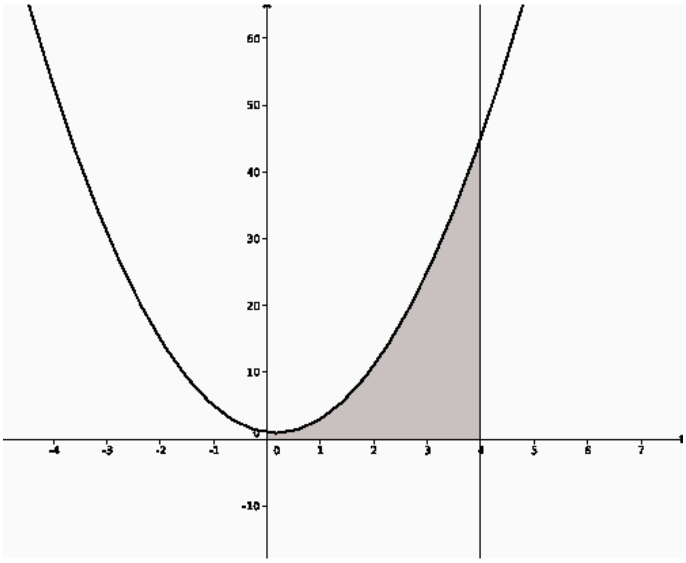
No tiene puntos de corte con el eje X pues el sistema

$$\begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

no tiene solución. La intersección con el eje Y es $(0, 1)$.

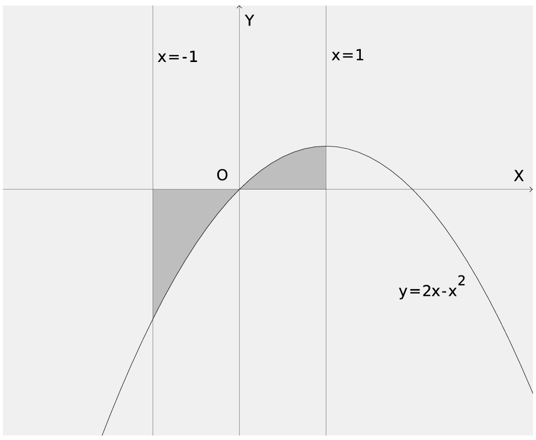
Puesto que la curva no corta al eje X, el área puede calcularse mediante la integral:

$$S = \int_0^4 (3x^2 - x + 1)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^4 = (64 - 8 + 4) - 0 = 60$$



Ejemplo 17 Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 2x - x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Representar gráficamente el recinto.

La representación gráfica del recinto es la siguiente:



Puesto que la curva corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $[-1, 1]$, será preciso calcular por separado las dos áreas:

$$\int_{-1}^{0} (2x - x^2)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{1} (2x - x^2)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

Entonces, la superficie total es:

$$S = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Ejemplo 18 Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x$.

Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de las curvas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema (para la incógnita x) son $x = 0$ y $x = 1$.

Calculamos la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_0^1 (2x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

y, por consiguiente, la superficie es igual a $\frac{1}{3}$.

Ejemplo 19 Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.

Calculamos la ecuación de la recta tangente. La derivada de la función es

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto de abscisa 0:

$$m = y'(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, es decir, $y = x$.

Ahora debemos calcular el área comprendida entre la curva y su tangente, es decir, entre $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta $y = x$. Como en el ejercicio anterior, calculamos los puntos de intersección:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + x \\ y = x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

Como las dos gráficas se cortan solamente en dos puntos, para calcular el área comprendida entre las dos, basta calcular la integral de la diferencia, o sea,

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x - x)\, dx = \int_0^2 (x^3 - 2x^2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$$

y la superficie encerrada por la curva y la tangente es igual a $\frac{4}{3}$.

---

9. Problemas de selectividad

1.
   a) Hallar las coordenadas del mínimo de la curva $f(x) = x^2 - 4x - 5$.
   b) Calcular el área del triángulo limitado por el eje OX y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX.
2. Se considera la curva de ecuación:

   $$y = x^3 - 4x$$

   a) Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos , si existen.
   b) Representar gráficamente la curva.
   c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje OX.

3. Para cada valor de a se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x+2}$$

Se pide:

   a) Calcular el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$.
   b) Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ para el valor $a = 3$.

4. Calcular el valor de a en los siguientes casos:

   a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\, dx = a$
   b) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\, dx = 3$
   c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\, dx = 5$

5. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^2 - x - 6$. Calcular:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$
   b) Los extremos relativos de $g(x)$ si existen.
   c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 3$ y $x = 6$.

6. Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$:

   a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b) Calcular sus asíntotas.
   c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

7. Se considera la función $f(x) = xe^{x^2}$:

   a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
   b) Calcular el área del recinto plano acotado por la gráfica de $f(x)$ para $x \geq 0$, el eje OX y la recta $x = 2$.

8. Sea la función:

$$f(x) = \frac{-x^3 + 1}{2x^2 + 2x - 12}$$

Se pide:

   a) Especificar su dominio de definición.
   b) Estudiar su continuidad.
   c) Calcular las asíntotas si las hubiera.

9. Calcular la integral definida:

$$\int_{-1}^{1} (|x| + x + 1)\, dx$$

10. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$$

   a) Determinar su dominio de definición.
   b) Determinar sus asíntotas.

11. Se considera la función rea de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10 \qquad a \neq 0$$

   a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.
   b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ y representar la función.

12. Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 - 2x - 8; \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 4$$

Calcular:

a) $\lim_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

b) Calcular el área del recinto acotado limitado por las curvas $f(x)$ y $g(x)$.

13. La función:

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$$

representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

14. a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde ésta corta al eje de ordenadas.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 4$.

15. Se considera la curva de ecuación:

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Hallar las asíntotas de la curva.

16. sea la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

Se pide:

a) Hallar sus asíntotas.

b) Calcular sus máximos y mínimos relativos.

17. Se considera la función real devariable real definida por:

$$y = x^3 - 9x$$

Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos si existen.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje OX.

18. Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2 + 8x$$

Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto en que la tangente a la curva es paralela a la recta $y = 2x$.

b) Calcular el área del recinto acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana $y = x + 8$.

19. Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$$

a) Encontrar las asíntotas de la función.

b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en que está definida.

20. Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = 9 - x^2; \qquad g(x) = 3 + x$$

y obtener su área.

21. Dada la función:

$$y = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

a) Determinar las asíntotas de la función.

b) Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

22. Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2; \quad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20); \quad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

y obtener su área.

23. Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

   a) Especificar su dominio de definición.

   b) Estudiar su continuidad.

   c) Calcular sus asíntotas si las hubiera.

24. La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades, pasa por el punto $(0, 0)$ y tiene un máximo local en el punto $(1, 2)$. Se pide:

   a) Obtener los coeficientes a, b y c.

   b) Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$.

25. Calcular el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real:

$$f(x) = x^2 - x; \qquad g(x) = 1 - x^2$$

26. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x} \qquad (x \neq 0)$$

   a) Determínense las asíntotas de f.

   b) Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   c) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

27. Se desea fabricar un acuario de base cuadrada y sin tapa de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la cantidad de cristal empleado?.

28. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} \qquad (x \neq \pm 2)$$

   a) Determínense las asíntotas de f.

   b) Calcúlense los máximos y mínimos relativos de f y determínense sus intervalos de crecimiento.

   c) Calcúlese la integral definida:

$$\int_3^5 (x^2 - 4) f(x)\,dx$$

29. Se considera la función real de variable real definida por:

$$y = (x^2 - 1)^2$$

   a) Determínense los extremos relativos de la función.

   b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 3$.

   c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje OX.

30. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - a}$$

   a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien, no tiene asíntotas verticales.

   b) Para $a = -1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales $\int_0^b f(x)\,dx = 0$.

31. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 24 & x \leq -3 \\ x^2 + 9 & 3 < x \leq 2 \\ -x + 15 & x > 2 \end{cases}$$

   a) Represéntese gráficamente la función f.

   b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

   c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

32. El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = x^2 + 7x - 10$$

   en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.

b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.

c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pérdidas (es decir, beneficio negativo).

33. Se considera el rectángulo R de vértices $BOAC$ con $B(0,b)$, $O(0,0)$, $A(a,0)$ y $C(a,b)$ con $a > 0$, $b > 0$ y cuyo vértice c está situado en la parábola de ecuación $y = -x^2 + 12$.

   a) Para $a = 3$, determínense las coordenadas de los vértices de R y calcúlese el área de R.

   b) Determínense las coordenadas de los vértices de R de manera que el área de R sea máxima.

   c) Calcúlese dicha área máxima.

34. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & x < 0 \\ 4-x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ ax+b & x > 2 \end{cases}$$

   a) Calcúlense a y b para que f sea continua y derivable en $x = 2$.

   b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la curva a la gráfica de la función f en el punto $x = 1$.

   c) Para $a = 1$, $b = -2$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f y el eje OX.

35. El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlense sus dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

36. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & x \leq -1 \\ -3x^2 + b & -1 < x \leq 1 \\ \ln x + a & x > 1 \end{cases}$$

   a) Calcúlense a y b para que la función f sea continua en todos sus puntos.

   b) Para $a = 0$ y $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

   c) Para $a = 0$ y $b = 3$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

37. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2}$$

   a) Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.

   b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

   c) Calcúlese la integral definida $\int_{2}^{3} f(x)\,dx$.

38. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & a \leq -1 \\ \frac{x^2 - b}{4} & x > -1 \end{cases}$$

   a) Calcúlese a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = -1$.

   b) Para $a = 1$ y $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

   c) Calcúlese el valor de b para que $\int_{0}^{3} f(x)\,dx = 6$.

39. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$$

   a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.

   b) Represéntese gráficamente la función f.

   c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado la gráfica de f, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = 1$.

40. Se considera un rectángulo R de lados x e y.

   a) Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense x e y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.

   b) Si el área de R es igual a 36 m^2, calcúlense x e y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese dicho perímetro mínimo.