Selectividad. Junio 2011

Opción A

Ejercicio 1. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- ◇ *Calcular el rango de A en función de los valores de a.*
- ◇ *En el caso $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b y resolverlo.*
- ◇ *En el caso $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$*

Solución:

◇ Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\begin{vmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^3 - a^2 + 4 - 2a^3 + 2a - 2a = 4 - a^2$$

El determinante se anula para $a = -2$ y $a = 2$. Pueden darse los siguientes casos:

♣ $m \neq 2$ y $m \neq -2$. El rango de la matriz es 3.

♣ $m = -2$. La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 2.

♣ $m = 2$. La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que también tiene rango 2.

◇ Sea el sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 2 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = b \end{cases}$$

Sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es 2. Para que el sistema sea compatible el rango de la matriz ampliada debe ser también 2. Por consiguiente, cualquier determinante de orden 3 formado con las filas y columnas de la matriz ampliada debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 6b - 18 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3$$

En este caso, el sistema es compatible indeterminado. Puesto que el rango de las matrices es 2 solamente hay dos ecuaciones independientes. Así pues, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 2 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 - 4\lambda \\ -x + 2y = 1 + \lambda \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 1 - \lambda, \quad y = 1, \quad z = \lambda$$

◇ Si $a = 1$, el sistema es compatible determinado. Puede resolverse, por ejemplo, por la regla de Cramer y se obtiene:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -1 \\ -x + y - z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 2, \quad y = 1, \quad z = -3$$

Ejercicio 2.

◇ Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas:

$$r_1 \equiv x = y = z, \qquad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

◇ Hallar la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{x+1}{-2}, \qquad r_4 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

◇ Calculamos las intersecciones de las rectas con el plano y obtenemos los puntos:

$$\begin{cases} x = y = z \\ 2x + 3y + 7z = 24 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(2, 2, 2)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 2x + 3y + 7z = 24 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B(12, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 2x + 3y + 7z = 24 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad C(0, 8, 0)$$

Tomando como aristas del tetraedro OA, OB y OC resulta:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 32$$

- Calculamos en primer lugar el vector director de la perpendicular común:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} (4, -3, -1)$$

El plano que contiene a la primera recta y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 \\ y-5 & 2 & -3 \\ z+1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 8x + 7y + 11z - 16 = 0$$

El plano que contiene a la segunda recta y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ y+1 & 3 & -3 \\ z-1 & - & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x + y + 9z - 8 = 0$$

La perpendicular común dada como intersección de planos es:

$$\begin{cases} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

- *Calcular la integral* $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2\,dx}$.
- *Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función* $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Solución:

- Aplicando el cambio de variable:

$$4 + 5x^2 = t \quad \Longrightarrow \quad 10x\,dx = dt \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{dt}{10x}$$

Teniendo en cuenta que para $x = 1$, $t = 9$ y para $x = 3$, $t = 49$, resulta:

$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2\,dx} = \int_9^{49} x\sqrt{t}\,\frac{dt}{10x} = \frac{1}{10}\int_9^{49} \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{1}{10}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_9^{49} = \frac{316}{15}$$

- La función existe en

$$12 - 3x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in [-2, 2]$$

La función $y = 12 - 3x^2$ es una parábola que alcanza su valor máximo en el vértice, es decir en $x = 0$. En ese punto alcanzará también el máximo la función $y = \sqrt{12-3x^2}$. La ordenada en ese punto es $\sqrt{12}$. El máximo absoluto y el máximo relativo de la parábola coinciden, de ahí que se alcance en $x = 0$ y valga $\sqrt{12}$.

Puesto que la función toma siempre valores no negativos, el mínimo absoluto de la función sera 0 y se alcanza en $x = -2$ y $x = 2$.

Ejercicio 4.

- *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

- ◇ *Demostrar que la ecuación* $4x^5 + 3x + m = 0$ *solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número* m*. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

Solución:

- ◇ Se trata de un límite con funciones potenciales. Basta considerar solamente los términos con mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

- ◇ La función $F(x) = 4x^5 + 3x + m$ es continua y derivable para todo valor de la variable. Puesto que es una función polinómica de grado impar, tiende a $+\infty$ cuando $x \to \infty$ y a $-\infty$ cuando $x \to -\infty$. Esto quiere decir que la función toma valores positivos y negativos. Por el teorema de Bolzano debe tomar el valor cero en un punto intermedio. Por consiguiente, la ecuación tiene al menos una solución.

  La derivada de la función $F(x)$ es:

$$F'(x) = 20x^4 + 3$$

  Esta función no se anula para ningún valor de x. Según el teorema de Rolle, si la función es derivable, entre cada dos ceros de la función debería haber un cero de la derivada. Puesto que no existen ceros de la derivada, no puede haber más de un cero de la función. De aquí se deduce que la solución de la ecuación propuesta es única

Opción B

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

se pide:

- ⋄ *Calcular el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.*
- ⋄ *Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.*
- ⋄ *Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.*

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{4ax^3 \cdot x^3 - 3x`2\,(ax`4 + 1)}{x^6} = \frac{ax^4 - 3}{x^4}$$

y la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{4ax^3 \cdot x^4 - 4x^3 \cdot (a^4 - 3)}{x^8} = \frac{12}{x^5}$$

- ⋄ En $x = 1$ la primera derivada es cero así que:

  $$a \cdot 1^4 - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 3$$

  Además, para $x = 1$ la segunda derivada es positiva. Por consiguiente, se trata de un mínimo. Para calcular los otros extremos de la función, igualamos a cero la derivada:

  $$3x^4 - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^4 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

  Ya hemos visto que en $x = 1$ hay un mínimo. Puesto que en $x = -1$ la derivada segunda es negativa, en ese punto hay un máximo.

- ⋄ La asíntota vertical es $x = 0$ puesto que

  $$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$$

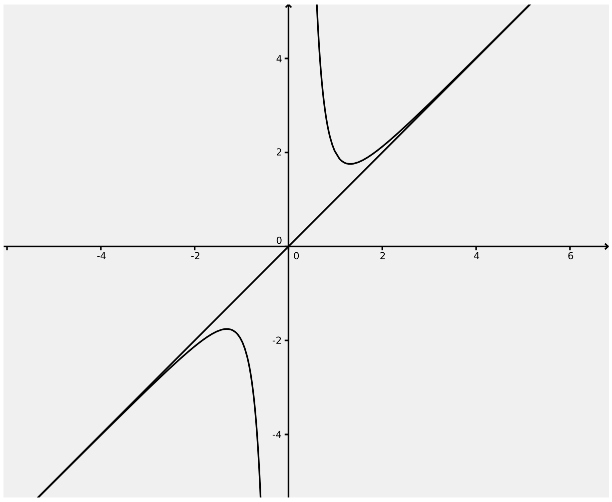
  No hay asíntota horizontal. La asíntota oblicua es $y = mx + b$ donde

  $$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^4+1}{x^3}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$$

  $$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{x^4+1}{x^3}}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

  Así pues, la asíntota oblicua es $y = x$.

- ⋄ Teniendo en cuenta las asíntotas y que no hay cortes con los ejes, la gráfica de la función es:



Ejercicio 2.

- *Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

  según los valores de m.

- *Resolver el sistema en los casos $m = 0$, $m = 1$.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes. Desarrollando por la primera columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (m-2)\left[1-(m-1)^2\right] = -m(m-2)^2$$

El determinante es cero para $m = 0$ y $m = 2$. Pueden darse los siguientes casos:

- $m \neq 0$ y $m \neq 2$. El rango de la matriz de coeficientes es 3. El rango de la matriz ampliada también debe ser 3. Los dos rangos son iguales al número de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

- $m = 0$. El rango de la matriz de coeficientes es menor que 3. Es fácil de ver que hay un menor de orden 2 distinto de cero, de modo que el rango es 2. Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

  El rango es 2 puesto que las columnas 1ª y 4ª son iguales y de signo contrario, lo mismo quelas columnas 2ª y 3ª. Así pues, ambas matrices tienen el mismo rango y este rango es menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado.

- $m = 2$. En este caso el rango de la matriz de coeficientes es 1. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

  Los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

Resolvamos el sistema para $m = 0$:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2x = 2 \end{cases}$$

Solamente hay dos ecuaciones independientes. Tomando la primera y la tercera y haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -2x = 2 \end{cases} \implies x = -1, \quad y = \lambda, \quad z = \lambda$$

Para $m = 1$ el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ -x = 3 \end{cases} \implies x = -3, \quad y = 1, \quad z = 1$$

Ejercicio 3. *Dados los planos:*

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \qquad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

- ◇ *Estudiar su posición relativa.*
- ◇ *En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.*

Solución:

- ◇ Los vectores perpendiculares a los planos son:

  $$\vec{u_1} = (2, 1, -2); \qquad \vec{u_2} = (1, -1, 2)$$

  Estos dos vectores no tienen la misma dirección (para que dos vectores tengan la misma dirección, sus coordenadas deben ser proporcionales). Por consiguiente los dos planos se cortan.

- ◇ El vector director de la recta debe ser perpendicular a los dos vectores normales. Puede tomarse su producto vectorial:

  $$\vec{u_1} \times \vec{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -6, -3)$$

  Un punto de la recta es cualquier solución del sistema

  $$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

  Haciendo $z = 0$ se obtiene la solución $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$

Ejercicio 4.

- ◇ *Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.*
- ◇ *Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(-2, 1, 1)$.*

◇ *Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.*

Solución:

◇ Podemos tomar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ como vectores directores del plano:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0), \qquad \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$$

La ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 2y + 2z = 2$$

◇ La ecuación es:

$$-2\,(x-1) + 1\,(y-2) + 1\,(z-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2x + y + z = 3$$

◇ Calculamos el vector $\overrightarrow{AP} = (0, 2, 3)$. El volumen del tetraedro es igual a:

$$A = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}$$