INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SOLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular los siguientes límites (donde "ln" significa *Logaritmo Neperiano).*

$$a)\quad (1\,punto)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos((3x))}{\ln(\cos(2x))}\qquad b)\quad (1\,punto)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función

$$f(x)=\frac{x^5-x^8}{1-x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de *f*. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
b) (1 punto) Estudiar si *f* tiene alguna asíntota vertical.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(m+2)x+(m-1)y-z=3\\ mx-y+z=2\\ x+my-z=1\end{cases}$$

Se pide:
a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.
b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos**.**

Dadas las rectas en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \qquad\qquad s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la distancia entre las dos rectas.

b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a *r* y *s*.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices *B* de dimensión 2x2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$.

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \to 8$ y $x \to -8$

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano

$$\pi \equiv x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a *r* y es perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 2. 0), y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1. \end{cases}$$

a) (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) (1 punto) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y + 3z = 9 \\ mx + 2y + z = 5 \\ x + y + z + = 2 \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) (1,5 puntos) Resolverlo para m = 1.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \frac{sen \quad x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

c) (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x)dx$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada tipo de billete.

b) (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A + B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(donde I denota la matriz identidad).

b) (1 punto) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea la función $f(x) = 2x|4 - x|$.

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Dibujar su gráfica.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{2}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r .

b) (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima**: 2 puntos.
Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Ejercicio 2. **Calificación máxima**: 2 puntos.
Se considera la función

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)dx$

Ejercicio 3. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dado el sistema

$$\begin{cases}(1-a)x-2y+4z=0\\ x-(1+a)y+z=0\\ -x+ay-z=0\end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro a.
b) (1.5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado .

Ejercicio 4. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Se consideran la recta y los planos siguientes

$$r\equiv\begin{cases}x=2-3\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=4-\lambda\end{cases}\quad;\quad \pi_1\equiv 2-3x+2y-z=0\quad;\quad \pi_2\equiv 3+2x+2y-2z=0.$$

Se pide:
a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.
b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.
c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima**: 2 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

se pide:
a) (1 punto) Hallar A^{-1}.
b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A)

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

Ejercicio 3. **Calificación máxima**: 3 puntos.
a) (3 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores de parámetro k:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 2x + 3y + kz = 3 \\ \pi_2 &\equiv x + ky - z = -1 \\ \pi_3 &\equiv 3x + y - 3z = -k \end{aligned}$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta

Ejercicio 4. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
c) (1 punto) Determinar el valor de a $\in$ (0, 1) para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima**: 2 puntos.
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de *B*.
b) (1 punto) Determinar una matriz *X* tal que $A = B.\,X$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima**: 2 puntos.
a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

b) (1 punto) Calcular un número *k* tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$
a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del (0, 0, 0) respecto de π.
b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje 0Z.
e) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

Ejercicio 4. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Sabiendo que una función *f(x)* tiene como derivada:

$$f'(x) = (x - 4)^2 (x^2 - 8x + 7)$$

a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de *f*.
c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de *f*? Justificar razonadamente la respuesta.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima**: 2 puntos.
a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.
b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
En el plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = 2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:
a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Ejercicio 3. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ respectivamente.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje 0X, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima**: 3 puntos.
a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se premite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

2. (2 puntos). Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:
   i) tiene un máximo relativo en $x = 1$.
   ii) tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
   iii) se verifica:

$$\int_0^1 p(x)dx = 5/4$$

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m-1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$$

   a) (1,5 puntos). Discutirlo según los distintos valores de m.
   b) (1,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

4. (3 puntos). Dado el punto P(1,3,– 1), se pide:
   a) (1 punto). Escribir la ecuación que deben verificar los puntos X(x,y,z) cuya distancia a P sea igual a 3.
   b) (2 puntos). Calcular los puntos de la recta:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

   cuya distancia a P es igual a 3.

OPCIÓN B

1. (2 puntos).

a) (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

b) (1 punto).Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación:

$$5x+y+\alpha z=\beta$$

el sistema resultante sea compatible indeterminado.

2. (2 puntos). Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}\, X\, A = B$$

siendo A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (3 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \right)$$

b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right]$$

4. (3 puntos). Dadas las rectas:

$$r:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4} \qquad s:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) (1,5 puntos). Calcular la mínima distancia entre r y s.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
(Curso 2004-2005)

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio
Septiembre
R1 R2

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1. (2 puntos). Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: x + z = \lambda$$
$$\pi_2: 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2$$
$$\pi_3: 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda$$

2. (2 puntos). Se consideran las rectas:

$$r: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + z = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

a) (1 punto). Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.
b) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado a).

3. (3 puntos). Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
b) (1 punto). Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.
c) (1 punto). Hallar todas las matrices X que satisfacen: $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

4. (3 puntos). Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto (a , $f(a)$) para $a > 0$.
b) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.
c) (1 punto). Hallar el valor de $a>0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en b) sea mínima.

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$ donde *ln* significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto (a , $f(a)$) tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

2. (2 puntos). Se considera la función:

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto). Calcular los extremos locales y/o globales de la función *f(x)*.
b) (1 punto). Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = 1/4$$

3. (3 puntos). Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.
Se pide:
a) (1 punto). Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
b) (1 punto). Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto P(1,1,0).
c) (1 punto). Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$r : \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

4. (3 puntos). Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Hallar A^{10}.
b) (1 punto). Hallar la matriz inversa de B.
c) (1 punto). En el caso particular $k = 0$, hallar B^{10}.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **(LOGSE)** Curso **2005-2006** **MATERIA** MATEMÁTICAS II	**6**

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio figura en el encabezamiento del mismo

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1.(2 puntos). Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x+ky-z=0 \\ kx-y+z=0 \\ (k+1)x+y=0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$. Resolverlo en tales casos.

2. (2 puntos). Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$

3. (3 puntos). a) (1 punto). Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) (1 punto). Demostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)$.

4. (3 puntos). Sean las rectas:

$$r: \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4} \qquad s: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$$

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director v=(4,31).Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano π: z = 0, el triángulo OPQ tenga área 1.

2. (2 puntos). Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s: \begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

3. (3 puntos). Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos). Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.
b) (1 ,5 puntos). Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

4. (3 puntos). a) (1,5 puntos); Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) (1,5 puntos). Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se premite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1. (2 puntos). Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

2. (2 puntos). a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x<0 \\ x^2+2a\cos x & si \quad 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si \quad x\ge\pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

3. (3 puntos). Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto). Comprobar que $\det(A^2)=(\det(A))^2$ y que $\det(A+I)=\det(A)+\det(I)$.

b) (0,5 puntos). Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple que $\det(M^2)=(\det(M))^2$?. Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos). Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:

$$\det(M+I)=\det(M)+\det(I).$$

4. (3 puntos). Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

a) (1 punto). Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) (1,5 puntos). Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). a) (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

2. (2 puntos). a) (1 punto). Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

b) (1 punto). Para una cualquiera de las matrices *A* obtenidas en el apartado a), calcular

$$M = A + A^2 + \ldots + A^{10}$$

3. (3 puntos). Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos). Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos). Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \le x \le 1$.

4. (3 puntos). Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos A(1,0,0), B(0,λ,0), C(0,0,4). Se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro OABC (donde O es el origen), sea 2.

b) (1,5 puntos). Para el valor de λ obtenido en el apartado a), calcular la longitud de la altura del tetraedro OABC correspondiente al vértice O.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1. (2 puntos). Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro *m*.

2. (2 puntos). Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$.

3. (3 puntos). Dados el punto A(1,–2,–3), la recta $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

y el plano $\pi: x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

a) (1,5 puntos). Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.
b) (1,5 puntos). Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

4. (3 puntos). Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) (1,5 puntos). Para cada valor de *m* hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (*a* , *f(a)*) pase por el origen de coordenadas.
b) (1,5 puntos). Hallar el valor de *m* para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de *f*(*x*).

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

2. (2 puntos). Dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

3. (3 puntos). Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ c & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Encontrar las condiciones que deben cumplir *a*, *b*, *c* para que se verifique *AB*=*BA*.

b) (1,5 puntos). Para *a*=*b*=*c*=1, calcular B^{10}.

4. (3 puntos). Sean los puntos $A(\lambda,2,\lambda)$, $B(2,-\lambda,0)$, $C(\lambda,0,\lambda+2)$.

a) (1 punto). ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos *A*, *B* y *C* están alineados?

b) (1 punto). Comprobar que si *A*, *B*, *C* no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto). Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo *ABC* para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **(LOGSE)**

Curso **2006-2007**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1. (2 puntos). Hallar los puntos de la recta $r:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano $\pi: 2x-y+2z+1=0$ es igual a 1.

2. (2 puntos). Se consideran las rectas:

$$r:\begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto P (2, –1, 2) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+(k+1)y+2z=-1 \\ kx+y+z=k \\ (k-1)x-2y-z=k+1 \end{cases}$$

se pide:
a) (2 puntos). Discutirlo según los distintos valores del parámetro *k*.
b) (1 punto). Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

4. (3 puntos). *a*) (1,5 puntos). Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$$

b) (1,5 puntos). Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (2 puntos). Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular *a* y *b* de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) (1 punto). Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

3. (3 puntos). Sean las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \qquad s: \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos). Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

4. (3 puntos). Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.

ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

iv) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) (1 punto). Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) (1 punto). Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

c) (1 punto). Si $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso 2007-2008
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

se pide:
a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.
b) (1 punto). Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases}, \qquad s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases},$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.
b) (1,5 puntos). Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r, s.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^2)$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\big(\ln(x)\big)^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix},$$

se pide:
a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_2.
b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_3.
c) (2 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_5.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
a) (1,5 puntos). Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1\,,$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.
b) (1,5 puntos). Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:
a) (0,5 puntos). Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
c) (0,5 puntos). Hallar la distancia del punto D al plano π.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dados el plano $\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:
a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π y r.
c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.
d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Curso **2007-2008**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = e^{-x}(x^2+1)$$

se pide:
a) (2 puntos). Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.
b) (1 punto). Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.
b) (1,5 puntos). Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a=1$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dados los puntos $P(1,1,3)$, $Q(0,1,0)$, se pide:
a) (1 punto). Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.
b) (1 punto). Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P,S) = 2\,\text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4},$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
a) (1,5 puntos). Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) (1,5 puntos). Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dados el plano:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:
a) (1 punto). Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.
b) (2 puntos). Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Curso **2008-2009**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$, se pide:
a) (1 punto). Calcular el punto simétrico P del punto $O(0, 0, 0)$ respecto del plano π.
b) (1 punto). Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.
c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 4\lambda y & + & 2z & = & 2\lambda \\ \lambda x & + & y & - & \lambda z & = & \lambda \\ 4\lambda x & + & 4\lambda y & + & \lambda z & = & 9 \end{array}\right. ,$$

se pide:
a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.
b) (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\, dt\,.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}\,, \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}\,,$$

se pide:
a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.
b) (1 punto). Determinar la distancia entre las rectas r y s.
c) (1 punto). Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.
Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3\,(x-5)\ ,$$

obtener:
a) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
b) (1 punto). Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
d) (1 punto). La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & \lambda \\ \lambda x & - & 2y & = & 4 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array}\right. ,$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.
b) (0,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea posible.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\,,$$

se pide:
a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.
b) (1 punto). Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Curso **2008-2009**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:
a) (1,25 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
b) (0,5 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
c) (1,25 puntos). Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si} \quad 1 + ax > 0 \quad \text{y} \quad x \neq 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.
b) (1,5 puntos). Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \qquad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
a) (1 punto). Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad ,$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.
b) (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.
c) (1,5 puntos). Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} \lambda x & +2y & +z & = & 0 \\ \lambda x & -y & +2z & = & 0 \\ x & -\lambda y & +2z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

se pide:
a) (1 punto). Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0\,.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$.