

1. Repaso de Cálculo

Continuidad

La función $f(x)$ es continua en $x = x_0$ si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x = x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una función es continua si a variaciones infinitesimales de la variable independiente corresponden variaciones infinitesimales de la variable dependiente:

$$f \text{ continua} \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

En $x = x_0$ hay una discontinuidad evitable si existe el límite de la función en x_0 pero no coincide con $f(x_0)$.

En $x = x_0$ hay una discontinuidad de tipo salto finito si existen los límites laterales pero no coinciden:

$$f \text{ tiene un salto finito en } x_0 \\ \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

En $x = x_0$ hay un salto infinito si el límite de la función es infinito:

$$f \text{ tiene un salto infinito en } x_0 \\ \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Teorema de Bolzano:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ \text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \end{array} \right. \\ \implies \exists c \in (a, b) \mid f(c) = 0$$

Si f es continua en $[a, b]$ toma en (a, b) todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Asíntotas

La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

La recta $y = y_0$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$$

La recta $y = mx + b$ es asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx - b) = 0$. Esto es equivalente a:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

Derivada:

La derivada de la función $f(x)$ se define por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada en $x = a$ se puede calcular por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 son:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Crecimiento y decrecimiento:

Si $f'(x) > 0$ la función es creciente en x .

Si $f'(x) < 0$ la función es decreciente en x .

Si $f'(x) = 0$ la función puede ser creciente, decreciente o tener un extremo local en x .

Para determinar qué ocurre en un punto de derivada cero hay que recurrir a los puntos próximos o a la derivada segunda.

En los extremos locales de las funciones derivables la derivada es cero.

Concavidad y convexidad:

Si $f''(x) > 0$ la función es cóncava en x .

Si $f''(x) < 0$ la función es convexa en x .

Si $f''(x) = 0$ la función puede ser cóncava, convexa o tener un punto de inflexión en x .

Para determinar qué ocurre en un punto de derivada segunda cero hay que recurrir a los puntos próximos o a la derivada tercera.

En los puntos de inflexión la derivada segunda es igual a cero.

Teorema de Rolle:

$$f(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{continua en } [a, b] \\ \text{derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right. \\ \implies \exists c \in (a, b) \mid f'(c) = 0$$

Como consecuencia, entre dos ceros de una función derivable debe haber al menos un cero de la derivada.

Si la función es derivable y la derivada no se anula para ningún valor de x , la función no puede anularse más de una vez.

Teorema del valor medio:

$$f(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{continua en } [a, b] \\ \text{derivable en } (a, b) \end{array} \right. \\ \implies \exists c \in (a, b) \mid f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Regla de L'Hopital:

Para funciones continuas y derivables que tiendan a 0 o a ∞ cuando x tiende a a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Integral indefinida

$$\int f(x) dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$$

Integrales inmediatas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{cos} x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\operatorname{cos} x| + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arsen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} dx = \operatorname{arsen} \frac{x}{k} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{artg} x + C$$

$$\int \frac{1}{k^2+x^2} dx = \frac{1}{k} \operatorname{artg} \frac{x}{k} + C$$

Todas estas igualdades son válidas si se sustituye x por $x+k$. Si se sustituye x por ax o por $ax+b$ también son válidas dividiendo en el segundo miembro por a .

Integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Se integran por partes los productos de funciones de distinto tipo. También se pueden hacer por partes $\int \ln x dx$, $\int \operatorname{artg} x dx$ y $\int \operatorname{arsen} x dx$.

Integración de funciones racionales

Son integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Los casos sencillos son los del tipo logaritmo y arcotangente.

En general se hace la división para que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. Si no son inmediatas se descomponen en fracciones simples.

Si el denominador es de segundo grado:

– Dos raíces:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} = \int \left(\frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2} \right) dx$$

– Una raíz doble:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} = \int \left(\frac{A}{x-r} + \frac{B}{(x-r)^2} \right) dx$$

– Raíces complejas:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} = c_1 \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + c_2 \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$$

La última integral es de tipo arcotangente escribiendo el denominador:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2+y_0$$

Integrales trigonométricas

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \operatorname{cos} 2x) dx$$

$$\int \operatorname{cos}^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \operatorname{cos} 2x) dx$$

Teorema fundamental del cálculo integral

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Regla de Barrow

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

donde $F'(x) = f(x)$.

2. Repaso de Álgebra y Geometría

Rango de una matriz

El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

Hay dos métodos para calcular el rango: el método de Gauss o el método de los determinantes

Método de Gauss

Las siguientes transformaciones no cambian el rango de la matriz:

- Suprimir filas o columnas linealmente dependientes
- Cambiar de orden filas o columnas
- Multiplicar filas o columnas por números distintos de cero
- Sumar a una fila o columna otra multiplicada por un número

El método de Gauss consiste en aplicar estas transformaciones para convertir la matriz en una matriz escalonada. El número de filas o columnas distintas de cero es el rango.

Determinantes

Los determinantes son números que se asocian a una matriz cuadrada de tal forma que el determinante es cero si las filas y columnas de la matriz son linealmente dependientes y es distinto de cero si son independientes.

Los determinantes de orden 2 o de orden 3 se pueden calcular por la regla de Sarrus. Los determinantes de orden superior se calculan desarrollando por los elementos de una línea.

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal.

El rango de una matriz es igual al orden del determinante de mayor orden distinto de cero que se puede formar con las filas y columnas de la matriz.

Por ejemplo, una matriz tiene rango 2 si con sus filas se puede formar un determinante de orden 2 distinto de cero y todos los determinantes de orden 3 que se puedan formar son cero.

Propiedades de los determinantes

- Si se intercambian dos filas o columnas el determinante cambia de signo.
- Si una fila o columna se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. Otra forma de expresar esta propiedad es decir que se puede sacar factor común de las filas y columnas del determinante.
- Si a una fila o columna se le suma otra multiplicada por un número, el determinante no varía. Esta propiedad se aplica para poner ceros en una fila o columna antes de desarrollar por esa fila.
- Se cumple una propiedad distributiva cuando hay sumas en una fila o columna.

Matriz inversa

La inversa de la matriz A cumple que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

La inversa de una matriz cuadrada es la adjunta de la traspuesta multiplicada por el inverso del determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A^t$$

Sistemas de ecuaciones lineales: clasificación

Los sistemas de ecuaciones se clasifican en compatibles e incompatibles según tengan solución o no.

Los sistemas compatibles se subdividen en determinados e indeterminados según tengan una o infinitas soluciones.

Resolución de un sistema determinado

Un sistema determinado se puede resolver por el método de Gauss o por la regla de Cramer.

El método de Gauss consiste en aplicar las siguientes transformaciones a la matriz del sistema:

- Eliminar las filas que sean linealmente dependientes.
- Intercambiar las filas de la matriz.
- Multiplicar las filas por números distintos de cero.
- Sumar a una fila otra multiplicada por un número.

Se aplican estas transformaciones hasta poner la matriz del sistema en forma escalonada y se calculan las incógnitas.

Regla de Cramer

Cada incógnita se obtiene como el cociente de dos determinantes.

El denominador es el determinante de la matriz de coeficientes.

El numerador es el determinante de la matriz de coeficientes sustituyendo los coeficientes de la incógnita que se quiere calcular por los términos independientes.

Teorema de Rouché

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada.

Si n es el número de incógnitas tenemos que:

- Si $\text{rango } A = \text{rango } A^* = n$ el sistema es compatible determinado.
- Si $\text{rango } A = \text{rango } A^* < n$ el sistema es compatible indeterminado.
- Si $\text{rango } A < \text{rango } A^*$ el sistema es incompatible.

Resolución del sistema indeterminado

- En la matriz de coeficientes se busca un determinante distinto de cero de orden igual al rango de la matriz.
- Las ecuaciones que no formen parte del determinante se eliminan como dependientes.
- Las incógnitas que no formen parte del determinante se pasan al segundo miembro como parámetros.
- Se resuelve el sistema resultante por cualquier método.

Sistemas homogéneos

Son aquellos en que los términos independientes son todos iguales a cero. Son siempre compatibles porque siempre admiten la solución trivial.

Ecuaciones del plano

Un plano queda determinado por un punto y dos vectores directores (paralelos al plano) o por un punto y un vector perpendicular.

Si se conocen un punto y dos vectores directores puede escribirse la ecuación en forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_x & v_x \\ y - y_0 & u_y & v_y \\ z - z_0 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$$

Si la dirección está dada por un vector normal se puede escribir la ecuación normal:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

o la general o implícita:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ecuaciones de la recta

Una recta se determina mediante un punto y un vector director o mediante dos planos que se cortan.

Si se conocen un punto y un vector director pueden escribirse las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x \\ y = y_0 + \lambda u_y \\ z = z_0 + \lambda u_z \end{cases}$$

o la ecuación continua:

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z}$$

Si se conocen dos planos que contienen la recta, su ecuación es:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Posiciones relativas de dos planos

Si dos planos son paralelos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Si no sucede esto, los planos se cortan.

Posiciones relativas de tres planos

Se considera el sistema formado por las tres ecuaciones de los planos en forma implícita:

- rango $A =$ rango $A^* = 3$: planos que se cortan en un punto.
- rango $A =$ rango $A^* = 2$: planos que se cortan en una recta
- rango $A = 2$, rango $A^* = 3$: los planos no tienen puntos comunes. Puede haber planos paralelos o no.
- rango $A = 1$, rango $A^* = 2$: tres planos paralelos.

Posición relativa de recta y plano

Se calcula el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

- Si es distinto de cero el plano y la recta se cortan en un punto.
- Si es cero es posible que sean paralelos o que la recta esté contenida en el plano

Para distinguir los dos últimos casos basta ver si un punto de la recta está en el plano.

Posición relativa de dos rectas

Es fácil ver si son paralelas.

Para distinguir si se cortan o se cruzan se calcula el producto mixto $[P\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}]$:

- Si es cero se cortan
- Si es distinto de cero se cruzan

Distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia del origen a un plano

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre planos paralelos

Deben escribirse sus ecuaciones con los mismos A , B y C :

$$d = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia de un punto a un plano

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia de un punto a una recta

Si la recta está dada por el punto Q y el vector \vec{u} :

$$d = \frac{|P\vec{Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

$$d = \frac{|[P\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Área del triángulo y volumen del tetraedro

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Plano mediador

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

Planos bisectores

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Superficie esférica

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Ángulos

$$\text{– De dos rectas: } \cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$\text{– De dos planos: } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

$$\text{– De recta y plano: } \sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

3. Repaso de Probabilidad

Experimentos aleatorios

Se caracterizan por:

- Cuando se realizan una sola vez no puede predecirse el resultado.
- Cuando el experimento se repite muchas veces pueden hacerse predicciones sobre las frecuencias de los distintos resultados. Estas frecuencias se llaman **probabilidades**.

Para describir matemáticamente un experimento aleatorio necesitamos:

- El **espacio muestral** que es el conjunto formado por los resultados posibles del experimento.
- Una **función de probabilidad** que asocia a cada elemento del espacio muestral un número comprendido entre 0 y 1 (su probabilidad). La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

Asignación de probabilidades

Distinguimos tres formas de asignar probabilidades:

- Atendiendo a la **simetría** del experimento. Por ejemplo, en muchos juegos de azar se asigna la misma probabilidad a todos los resultados.
- De forma **empírica**, repitiendo el experimento muchas veces. Las frecuencias relativas se toman como probabilidades.
- Por medio de un **modelo teórico**. Estos modelos se llaman distribuciones de probabilidad.

Sucesos

Un **suceso** S es un subconjunto del espacio muestral E .

El espacio muestral considerado como subconjunto de sí mismo se llama **suceso seguro**. El **suceso imposible** es el que no tiene ningún elemento. La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los resultados que lo componen.

El conjunto de resultados de E que no están en S se llama **suceso contrario** de S y se representa mediante \bar{S} o S' . La probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\bar{S}) = 1 - p(S)$$

El suceso $A \cup B$ está formado por los resultados que están en A o en B .

El suceso $A \cap B$ está formado por los resultados que están en A y en B .

Si $A \cap B$ es el suceso imposible, A y B son **incompatibles**.

Los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ cumplen que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Además verifican las relaciones de **de Morgan**:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

La **diferencia** de A y B es el conjunto de elementos de A que no pertenecen a B . Se representa por $A - B$ o $A \cap \bar{B}$. La probabilidad de la diferencia de sucesos es:

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$$

Espacios equiprobables. Regla de Laplace

En muchos experimentos todos los resultados del espacio muestral tienen la misma probabilidad. En este caso, el espacio se llama **equiprobable**.

Si el espacio tiene n resultados posibles, la probabilidad de cada uno de ellos es:

$$p = \frac{1}{n}$$

La probabilidad de un suceso A de m resultados es:

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de resultados del suceso}}{\text{n}^\circ \text{ total de resultados}}$$

Esta fórmula se suele recordar de la siguiente forma: la probabilidad es igual al número de casos favorables dividido entre el número de casos posibles (**regla de Laplace**).

Probabilidad condicionada

La probabilidad del suceso B condicionada al suceso A es:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Esto se puede escribir como:

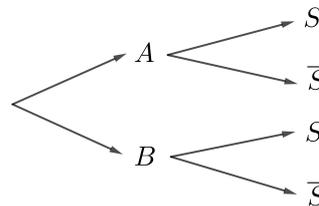
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) \quad (\text{regla del producto})$$

Si $p(B|A) = p(B)$ los sucesos A y B son **independientes**. Si los sucesos son independientes:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) = p(A) \cdot p(B)$$

Probabilidad total

En ocasiones se conocen las probabilidades condicionadas de un suceso y se desea conocer la probabilidad total. El problema responde al siguiente esquema:



La probabilidad del suceso S es igual a:

$$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) = p(A) \cdot p(S|A) + p(B) \cdot p(S|B)$$

Fórmula de Bayes

Si en el problema anterior se sabe que se ha realizado el suceso S y se quiere calcular la probabilidad de A o de B :

$$p(A|S) = \frac{p(A \cap S)}{p(S)} = \frac{p(A) \cdot p(S|A)}{p(A) \cdot p(S|A) + p(B) \cdot p(S|B)}$$

Distribuciones de probabilidad

Una **distribución de probabilidad** es la representación matemática de un experimento aleatorio. Está compuesta de:

- La **variable aleatoria**. Puede ser discreta o continua y toma como valores los resultados del experimento. La variable aleatoria es **discreta** si toma un conjunto finito de valores. Es **continua** si toma como valores los de un intervalo de números reales.
- Una **función de probabilidad**. Se define de manera diferente según la variable aleatoria sea discreta o continua.

Distribuciones de variable discreta

La variable aleatoria X toma un conjunto finito de valores $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. La **función de probabilidad (pdf)** asigna una probabilidad a cada uno de estos valores:

$$f(x) = p(X = x)$$

La probabilidad se puede asignar también mediante la **función de distribución (cdf)** que es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual que x :

$$F(x) = p(X \leq x)$$

Valor esperado, varianza, desviación

La **media o valor esperado** y la **varianza** se definen por:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu = \sum p_i x_i \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2 = \sum p_i (x_i - E(X))^2 \\ &= \sum p_i x_i^2 - \mu^2 \end{aligned}$$

La **desviación típica** σ es la raíz cuadrada de la varianza.

Distribuciones de variable continua

La variable aleatoria puede tomar los valores de un intervalo $[a, b]$ (a y b pueden ser infinitos).

La probabilidad queda determinada por la **función de densidad (pdf)** $f(x)$ de tal forma que:

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1, se cumple que:

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

La **función de distribución (cdf)** representa la probabilidad acumulada:

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_a^x f(x) dx$$

también:

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

La función de densidad es la derivada de la función de distribución:

$$f(x) = F'(x)$$

Las fórmulas de la media y la varianza son iguales que las de la variable discreta sustituyendo la suma por una integral:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x f(x) dx \\ \text{Var}(X) &= \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 f(x) dx - E(X)^2 \end{aligned}$$

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

La distribución binomial o de Bernoulli

La distribución binomial es un modelo matemático del siguiente experimento:

- Una prueba tiene dos resultados posibles: éxito con probabilidad p y fracaso con probabilidad $q = 1 - p$.
- La prueba se repite n veces. Las pruebas son independientes.

– El resultado es el número de éxitos que se obtienen.

Sea $X =$ «número de éxitos obtenidos». X puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots, n$. La función de probabilidad es:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

El valor esperado es $E(X) = np$ y la varianza $\text{Var}(X) = npq$.

Si una variable aleatoria X tiene una función de probabilidad como esta, diremos que sigue la distribución binomial $B(n, p)$ y escribiremos $X \sim B(n, p)$.

La distribución normal

La distribución normal standard $N(0, 1)$ es una distribución de variable continua. La variable aleatoria se suele representar por Z y su función de densidad es:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

La media o valor esperado de esta distribución es cero y la desviación típica es igual a 1.

Las probabilidades de la distribución normal son complicadas de obtener por integración. Por ello, se suelen usar tablas con los valores de la función de distribución $\Phi(x)$.

En la tabla solamente aparecen los valores positivos de x . Para calcular los valores de $\Phi(x)$ para los x negativos hay que tener en cuenta que de la simetría de la función resulta que:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

La distribución $N(\mu, \sigma)$

Haciendo el cambio $x = \mu + \sigma z$ se obtiene la distribución normal de media μ y desviación típica σ que se representa por $N(\mu, \sigma)$. Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Las probabilidades de esta distribución se pueden obtener a partir de las de la distribución $N(0, 1)$ haciendo el cambio:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

que se llama tipificar la variable.

Aproximación de la binomial por la normal

Sea $X \sim B(n, p)$ y $X' \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$. Sea $f(x)$ la función de densidad de $X' \sim N(\mu, \sigma)$.

Si np y nq son grandes:

$$p(X = k) \simeq f(k)$$

La aproximación se suele utilizar para calcular probabilidades acumuladas de la distribución binomial. En ese caso se aplica la corrección de continuidad o de Yates que asocia a cada número entero k el intervalo $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$ para calcular las probabilidades:

$$\begin{aligned} p(X \leq k) &\simeq p\left(X' \leq k + \frac{1}{2}\right) \\ p(k_1 \leq X \leq k_2) &\simeq p\left(k_1 - \frac{1}{2} \leq X' \leq k_2 + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Como regla práctica se suele decir que la aproximación es buena si np y nq son mayores que 5.