Matemáticas II

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2021/2022

Índice general

Tema 1

Funciones

1.1. Definiciones.

Una **función** f es una correspondencia que asocia a cada número real x (**variable independiente**) un único número real $f(x)$ (**variable dependiente**). La representación gráfica de la función f es la curva de ecuación $y = f(x)$ formada por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

El **dominio** o dominio de definición de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x. El **recorrido** es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente $f(x)$.

Una función como $\cos^2 x$ puede considerarse como la aplicación sucesiva a la variable independiente x de la función $f(x) = \cos x$ y de la función $g(x) = x^2$. Esta operación consistente en aplicar sucesivamente dos funciones se llama composición de funciones y se representa por $g \circ f$:

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

En general, la composición de funciones no es conmutativa. Por ejemplo, es diferente $\cos^2 x$ que $\cos(x^2)$.

Dos funciones f y f^{-1} son **inversas** una de la otra si

$$f(x) = y \quad \Longrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \qquad \text{o bien} \qquad f \circ f^{-1}(x) = x$$

Son funciones inversas el cuadrado y la raíz cuadrada, el logaritmo y la exponencial o el arcoseno y el seno puesto que:

$$\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x\ ; \qquad \ln e^x = e^{\ln x} = x\ ; \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arsen} x) = \operatorname{arsen}(\operatorname{sen} x) = x$$

La función inversa sirve para despejar el argumento de una función. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x^2 = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \sqrt{y} \\ \ln x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = e^y \\ e^x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \ln y \\ \cos x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \arccos y \end{aligned}$$

La función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo si para puntos x_1, x_2 en ese intervalo:

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

De forma similar, $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo si para puntos x_1, x_2 en ese intervalo:

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

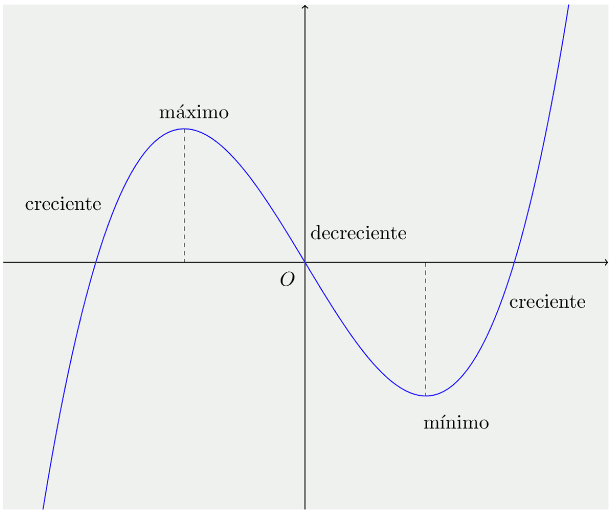


Figura 1.1: Intervalos de crecimiento y decrecimiento

La función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor mayor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

Una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor menor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

También podemos clasificar los puntos de la gráfica de una función según que la tangente quede por encima o por debajo de la curva. Si la tangente en un punto queda por encima de la curva, diremos que la función es **convexa** en ese punto y si queda por debajo diremos que la función es **cóncava**. Los puntos en que la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman **puntos de inflexión** de la curva. En estos puntos, la tangente atraviesa la curva.

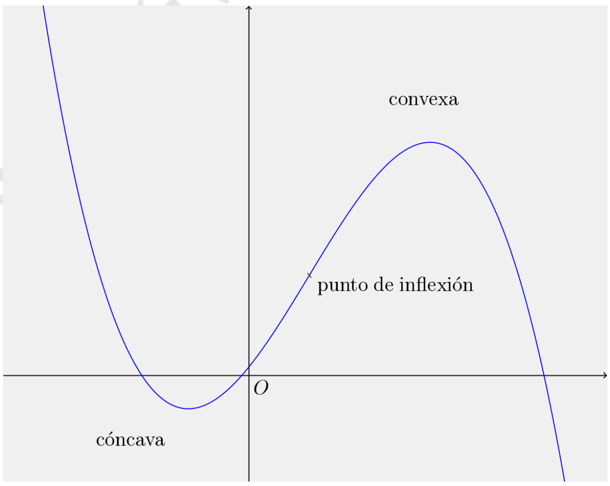


Figura 1.2: Intervalos de concavidad y convexidad

Si la tangente en un punto queda por encima de la curva, diremos que la función es **convexa** en ese punto y si queda por debajo diremos que la función es **cóncava**. Los puntos en que la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman **puntos de inflexión** de la curva. En estos puntos, la tangente atraviesa la curva.

Una función es **par** o **simétrica respecto al eje de ordenadas** si cumple que $f(-x) = f(x)$. Las funciones polinómicas que tienen solamente potencias pares son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Una función es **impar** o **simétrica respecto al origen** si cumple que $f(-x) = -f(x)$. Las funciones polinómicas que tienen solamente potencias impares son simétricas respecto al origen.

Una **función periódica** de período T es aquella cuyos valores se repiten a intervalos de longitud T, es decir que:

$$f(x+T) = f(x)$$

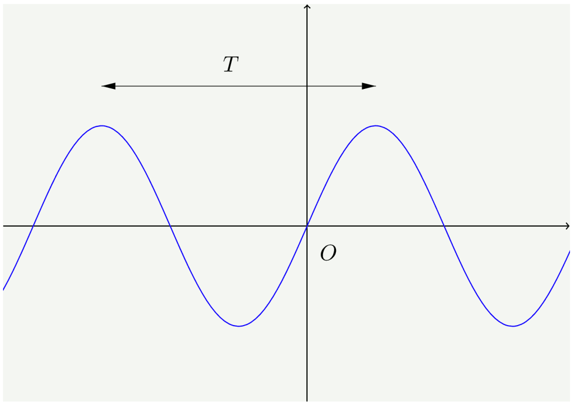


Figura 1.3: Función periódica

Ejercicio 1. Sea la función $f(x) = 4e^{2x} - 3$, calcular $f^{-1}(x)$.

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = 4e^{2y} - 3\ ; \qquad e^{2y} = \frac{x+3}{4}\ ; \qquad 2y = \ln\frac{x+3}{4}\ ; \qquad y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+3}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el dominio de definición de la función:

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$$

Solución:

Para que exista el numerador debe ser $x > -1$ y para que el denominador exista y sea distinto de cero debe ocurrir que $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Para que se cumplan las dos condiciones debe ser $x > \sqrt{3}$.

♠♠♠♠

1.2. Funciones de primer y segundo grado.

Recordemos que la representación gráfica de las funciones polinómicas de primer grado

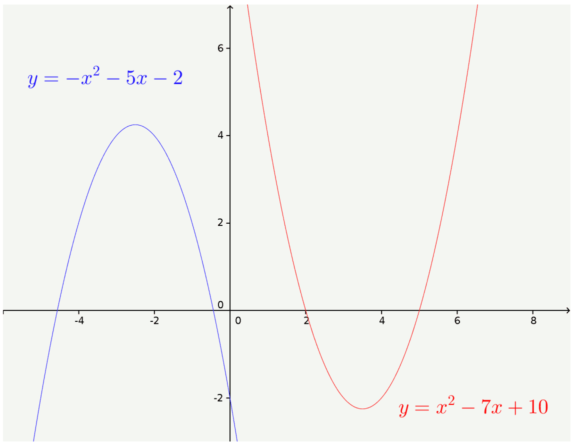
$$f(x) = mx + b$$

es una línea recta de pendiente m y cuya ordenada en el origen es b.

La representación gráfica de la función polinómica de segundo grado o función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es una parábola. La parábola presenta un mínimo o un máximo según que el coeficiente de x^2 sea positivo o negativo. El máximo o mínimo de la función es el vértice de la parábola.



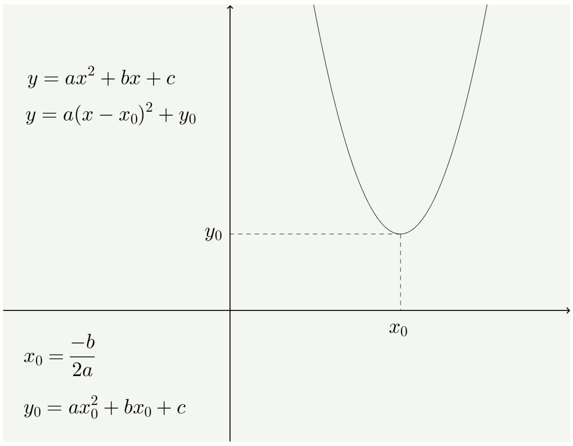


Figura 1.4: Función cuadrática

Las intersecciones de la parábola con los ejes se obtienen resolviendo el sistema formado por la ecuación de la parábola y la ecuación de los ejes.

$$OX : \begin{cases} y = ax^2 + bx + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad OY : \begin{cases} y = ax^2 + bx + c = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Las coordenadas del vértice se calculan de la siguiente forma: la abscisa del vértice es el punto medio de las intersecciones (si existen) con el eje OX. Una vez calculada la abscisa, se obtiene la ordenada sustituyendo en la ecuación de la parábola:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \; ; \qquad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

Si la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene su vértice en el punto $V(x_0, y_0)$ su ecuación puede escribirse

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Ejercicio 3. Representar gráficamente la función $y = x^2 - 5x - 14$.

Solución:

El punto de intersección con el eje de ordenadas es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 14 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad A(0, -14)$$

Los (posibles) puntos de intersección con el eje de abscisas se obtienen del sistema:

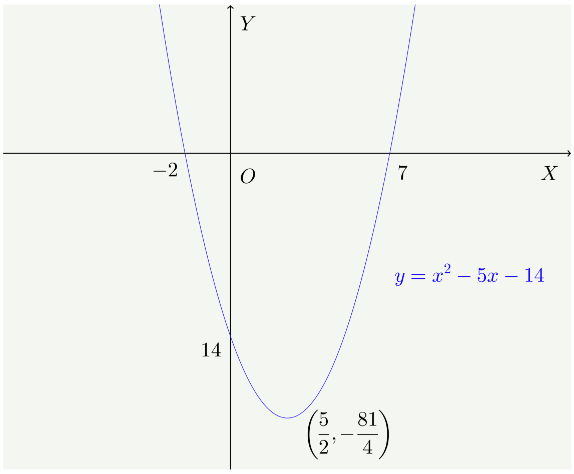
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 14 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

Hay dos puntos de intersección de abscisas -2 y 7. Los puntos son entonces $B_1(-2, 0)$ y $B_2(7, 0)$

El vértice tiene como coordenadas

$$x_0 = \frac{5}{2}; \qquad y_0 = \frac{25}{4} - 5 \cdot \frac{5}{2} - 14 = -\frac{81}{4}$$

Con estos datos, la representación gráfica sería:



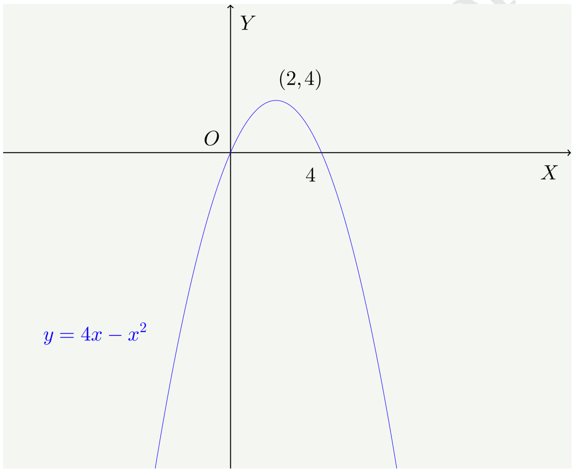
♠♠♠♠

Ejercicio 4. Representar gráficamente la función $y = 4x - x^2$.

Solución:

Procediendo de forma similar al problema anterior resulta que la intersección con el eje OY es el punto $(0,0)$, las intersecciones con el eje OX están en $(0,0)$ y $(4,0)$ y el vértice en $(2,4)$.

La representación gráfica es:



Obsérvese que, puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, la función presenta un máximo al contrario de lo que ocurría en el ejemplo anterior.

♠♠♠♠

1.3. Función de proporcionalidad inversa.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si su producto es constante. Las funciones definidas mediante ecuaciones del tipo:

$$y = \frac{k}{cx + d} \qquad \text{ó} \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** y la curva correspondiente es una **hipérbola**. Esta curva puede dibujarse calculando sus intersecciones con los ejes:

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax + b}{cx + d} \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y = \dfrac{ax + b}{cx + d} \\ x = 0 \end{cases}$$

y sus **asíntotas**. Más adelante se verá cómo se pueden obtener las asíntotas de cualquier curva. Para la función de proporcionalidad inversa la asíntota vertical se obtiene igualando a cero el denominador y la asíntota horizontal dividiendo los coeficientes de x:

$$\text{asíntota horizontal: } y = \frac{a}{c} \qquad \text{asíntota vertical: } x = \frac{-d}{c}$$

Conocidas las asíntotas $x = x_0$ e $y = y_0$, la ecuación de la hipérbola puede escribirse en la forma:

$$(x - x_0)(y - y_0) = k$$

donde se pone de manifiesto que las magnitudes inversamente proporcionales son $x - x_0$ e $y - y_0$.

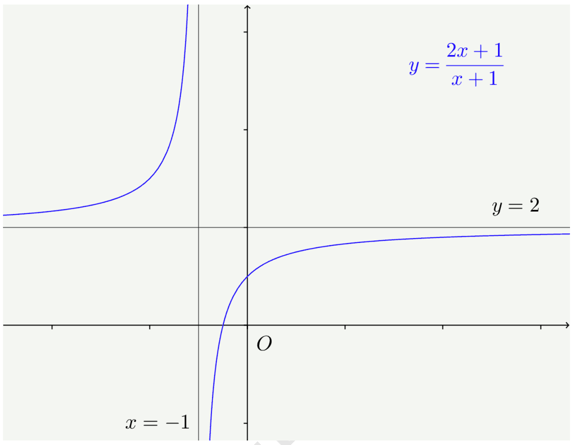


Figura 1.5: Función de proporcionalidad inversa

Ejercicio 5. Representar gráficamente la función:

$$y = \frac{2x - 5}{x - 3}$$

Solución:

La asíntota vertical es $x - 3 = 0$, es decir, $x = 3$.

La asíntota horizontal es $y = 2$ (y igual al cociente de los coeficientes de x).

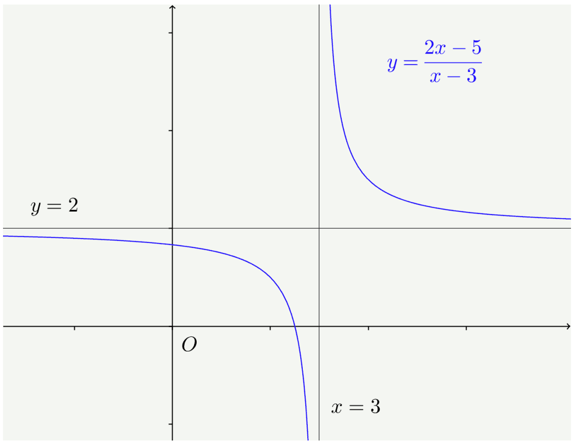
Calculamos las intersecciones con los ejes. El punto de intersección con el eje de abscisas es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-5}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \implies A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

y el punto de intersección con el eje de ordenadas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-5}{x-3} \\ x = 0 \end{cases} \implies B\left(0, \frac{5}{3}\right)$$

Con estos datos, la gráfica de la función es la siguiente:



♠♠♠♠

1.4. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones definidas por $y = a^x$ donde a es un número positivo cualquiera se llaman **funciones exponenciales**. Sea cual sea el valor de a, la función puede escribirse en la base e, es decir como $y = e^{kx}$ con $k = \ln a$ positivo o negativo según que a sea mayor o menor que 1. Como características más importantes de estas funciones destaquemos las siguientes:

- Sea cual sea el valor de x, e^{kx} es positivo.
- El eje de abscisas, esto es la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $y = e^{kx}$ en $-\infty$ o $+\infty$ según sea k positivo o negativo.
- La curva $y = e^{kx}$ no corta al eje de abscisas. Corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 1)$.

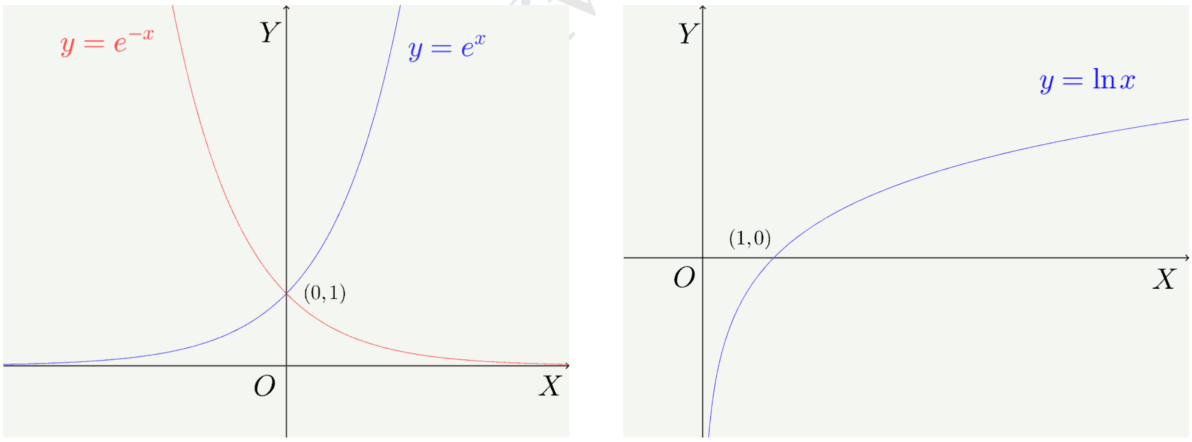


Figura 1.6: Funciones exponenciales y logarítmicas

Se llaman funciones logarítmicas las definidas por $f(x) = \log_a x$. Con ayuda de la fórmula del cambio de base de los logaritmos, cualquier función logarítmica puede expresarse como $y = k \cdot \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano o sea el logaritmo en la base e. Como propiedades fundamentales de estas funciones citaremos:

- Las funciones logarítmicas solo existen para x positivo.
- La recta $x = 0$ (el eje de ordenadas) es asíntota vertical de $y = k \cdot \ln x$.
- La curva $y = k \cdot \ln x$ no corta al eje de ordenadas. Corta al eje de abscisas en $(1, 0)$.

1.5. Funciones circulares.

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \operatorname{tg} x$ así como sus recíprocas cosecante, secante y cotangente, tienen la particularidad de que son periódicas, es decir toman valores iguales cada 2π radianes.

Como se ve (figura 1.7), las gráficas de las funciones seno y coseno son iguales pero desfasadas en $\frac{\pi}{2}$. La función tangente tiene asíntotas $x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ para $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

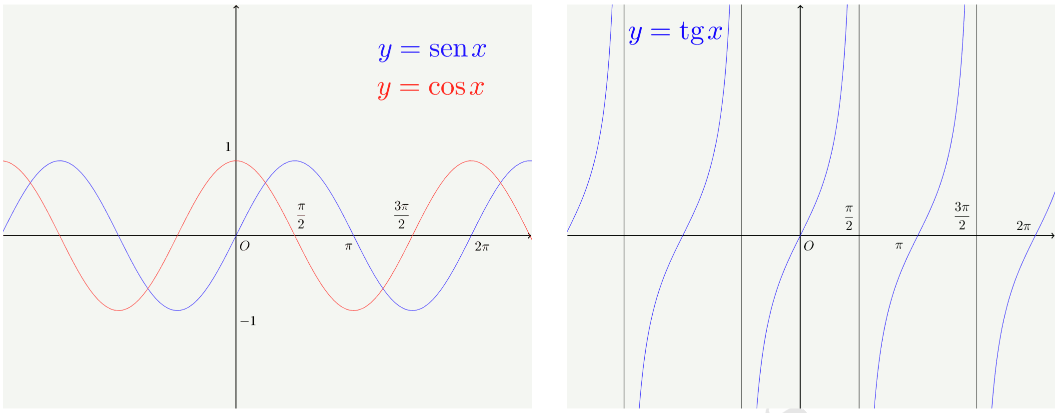


Figura 1.7: Funciones circulares

Las inversas de estas funciones se llaman **arcoseno**, **arcocoseno** y **arcotangente**. Estas funciones se definen de la siguiente manera:

- arsen x es el ángulo (en radianes) comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno vale x.
- arcos x es el ángulo comprendido entre 0 y π cuyo coseno vale x.
- artg x es el ángulo comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuya tangente vale x.

1.6. Transformación de funciones

Sea la función definida por $y = f(x)$.

◇ **Traslaciones.**

La gráfica de $y = f(x - x_0)$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ hacia la derecha x_0 unidades.
La gráfica de $y = y_0 + f(x)$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ hacia arriba y_0 unidades.

◇ **Simetrías.**

La gráfica de $y = f(-x)$ es simétrica de $y = f(x)$ respecto al eje de ordenadas.
La gráfica de $y = -f(x)$ es simétrica de $y = f(x)$ respecto al eje de abscisas

◇ **Cambios de escala.**

La gráfica de $y = f(kx)$, $k > 0$ es la misma que la de $y = f(x)$ dividiendo por k la escala en el eje de abscisas.
La gráfica de $y = kf(x)$ es la misma que la de $y = f(x)$ multiplicando por k la escala del eje de ordenadas.

◇ **Función recíproca.**

Para dibujar $y = \frac{1}{f(x)}$ a partir de $y = f(x)$ tendremos en cuenta lo siguiente:

- Dibujamos las rectas $y = 1$ e $y = -1$. Los puntos de intersección de $y = f(x)$ con estas rectas pertenecen también a la gráfica de la función recíproca.

- Los ceros de una función son asíntotas verticales de la otra y viceversa.
- Cuando una de las funciones es creciente la otra es decreciente. Los máximos y mínimos de una función son mínimos y máximos de la otra (salvo que tengan ordenada cero).
- Si una de las funciones tiende a infinito la otra tiende a cero y viceversa.
- Para cada valor de x las dos funciones tienen el mismo signo.

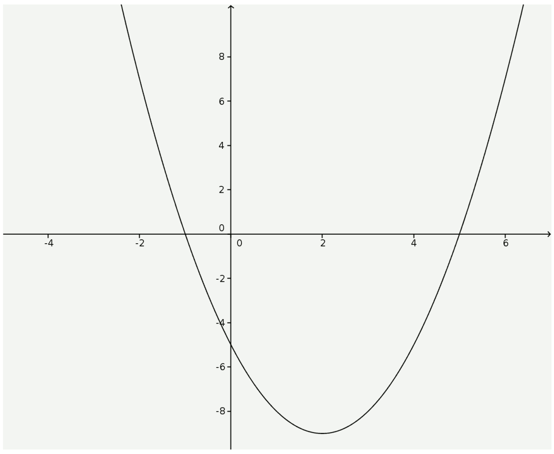
◇ **Valor absoluto.**

Para $x > 0$ la gráfica de la función $y = f(|x|)$ es igual que la de $y = f(x)$. Para $x < 0$ es la imagen reflejada en el eje de ordenadas de la parte correspondiente a los x positivos.
La gráfica de la función $y = |f(x)|$ es igual que la de $y = f(x)$ si $f(x) > 0$. Cuando $f(x) < 0$ es la simétrica de $y = f(x)$ respecto al eje de abscisas.

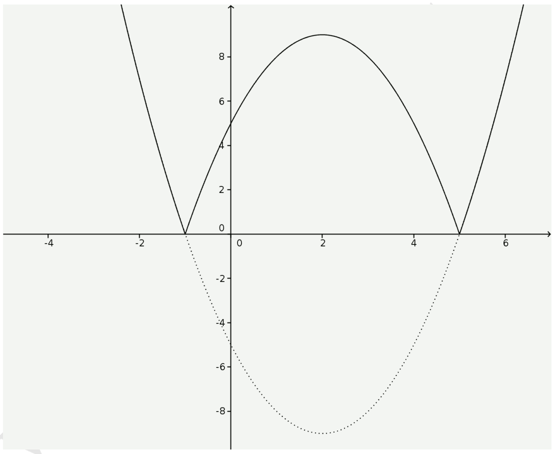
Ejercicio 6. Dibujar aproximadamente el gráfico de $y = |x^2 - 4x - 5|$ e $y = x^2 - 4|x| - 5$.

Solución:

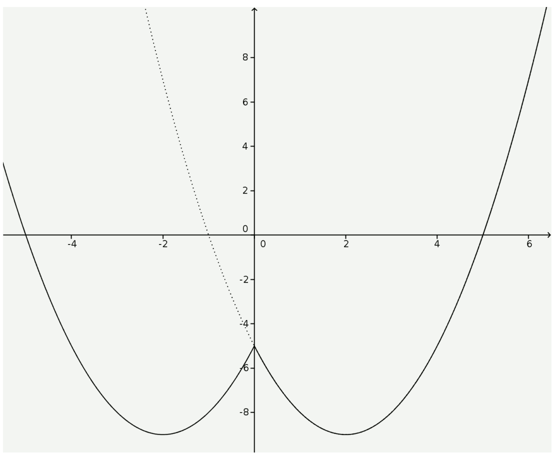
La gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x - 5$ es:



La gráfica de $y = |x^2 - 4x - 5|$ es:



La gráfica de $y = x^2 - 4|x| - 5$ se obtiene reflejando en el eje OY la parte correspondiente a las x positivas:



♠♠♠♠

Ejercicio 7. Sean las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}\ ; \qquad g(x) = 1 - \frac{2}{x+3}$$

(*a*) Explicar qué transformaciones permiten pasar de $f(x)$ a $g(x)$.
(*b*) Representar la curva $y = g(x)$ indicando sus asíntotas y sus intersecciones con los ejes de coordenadas.

Solución:

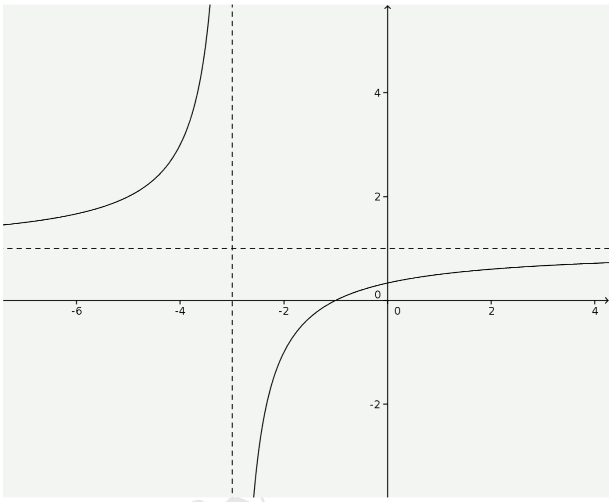
(*a*) Pueden aplicarse sucesivamente las siguientes transformaciones:

$$\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{1}{x+3} \longrightarrow \frac{2}{x+3} \longrightarrow -\frac{2}{x+3} \longrightarrow 1 - \frac{2}{x+3}$$

Es decir:

- Traslación en el eje OX
- Cambio de escala en el eje OY
- Simetría respecto a OX
- Traslación en el eje OY

(*b*) Es una función de proporcionalidad inversa. La gráfica es:



Las asíntotas son las rectas $y = 1$ y $x = -3$. Los puntos de intersección con los ejes son $(-1, 0)$ y $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

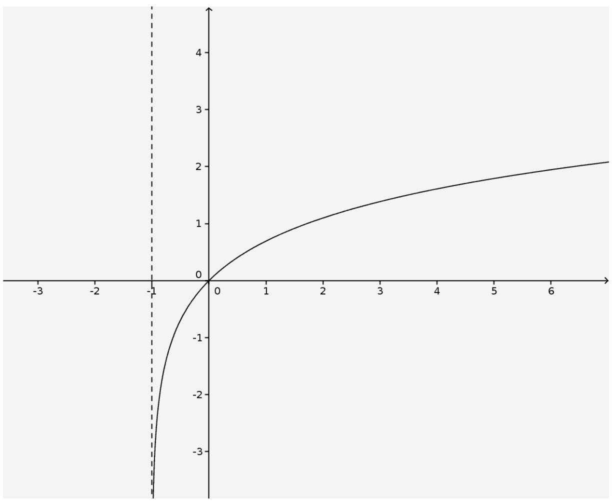
♠♠♠♠

Ejercicio 8. Representar la curva

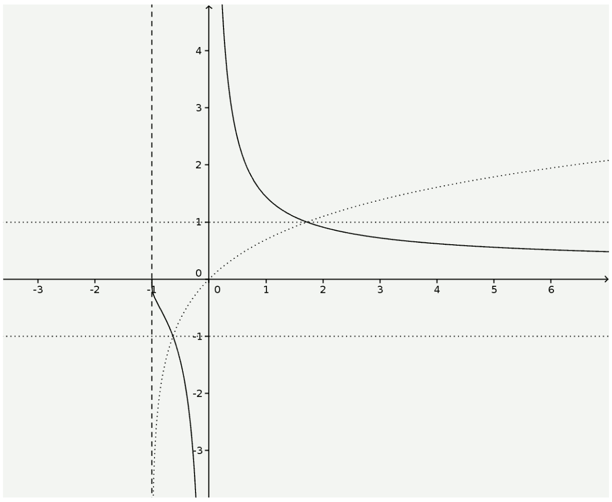
$$y = \frac{1}{\ln(x+1)}$$

Solución:

Primero representamos la curva $y = \ln(x+1)$ trasladando $y = \ln x$ una unidad hacia la izquierda:



Y después representamos la recíproca $y = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$:



♠♠♠♠

Tema 2

Límites de funciones. Continuidad

2.1. Límite cuando la variable tiende a infinito.

Cuando escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

queremos decir que cuando la variable x se hace muy grande los valores de la función son muy próximos al número l. Gráficamente sería así:

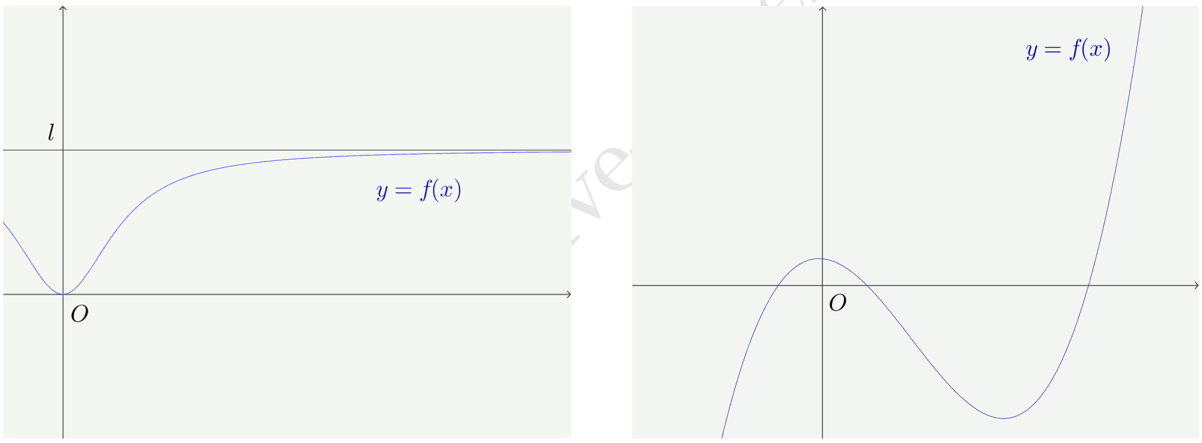


Figura 2.1: Límite cuando la variable tiende a infinito

Vemos que en este caso la gráfica de la función cuando x se hace muy grande se aproxima a la recta horizontal $x = l$. Veremos más adelante que esta recta se llama asíntota horizontal de la función (ver figura 2.1 izquierda).

Si el límite es infinito (y de modo muy parecido si es menos infinito) escribimos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

y significa que eligiendo x suficientemente grande la función toma valores tan grandes como se quiera, es decir, la gráfica de la función corta a cualquier recta horizontal (ver figura 2.1 derecha).

De forma más precisa (figura 2.1):

Definición 1 (Límite finito cuando $x \to \infty$). *El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a infinito es l, y se escribe:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

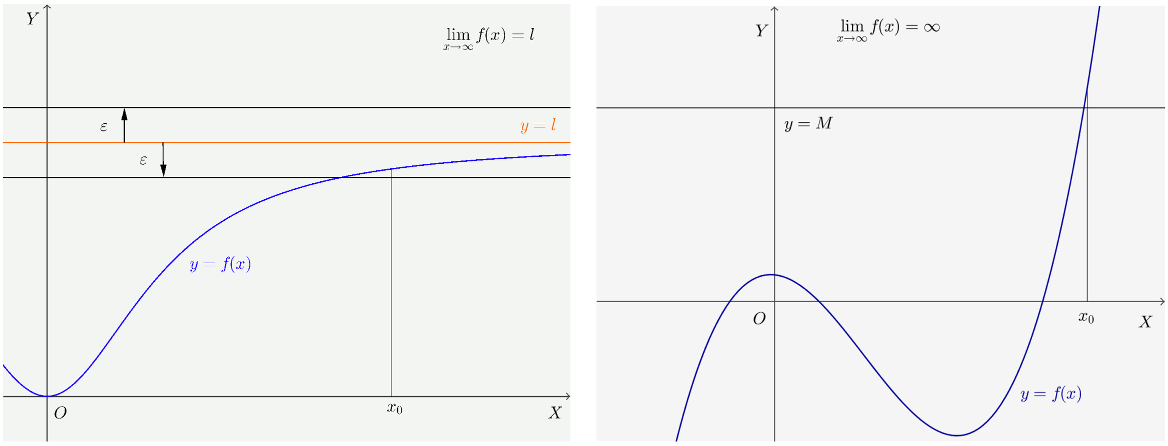


Figura 2.2: Límites cuando x tiende a infinito

si dado un número cualquiera ε mayor que cero, existe un valor de la variable x_0 tal que para los valores de x mayores que x_0, la distancia entre los valores de la función y el límite son menores que ε:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \quad | \quad x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definición 2 (Límite infinito cuando $x \to \infty$). *Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando la variable x tiende a infinito es infinito y se escribe:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

si dado cualquier número M, existe un valor de la variable x_0 a partir del cual los valores de la función son mayores que M:

$$\forall M \quad \exists x_0 \quad | \quad x > x_0 \Longrightarrow f(x) > M$$

Los límites cuando la variable tiende a menos infinito se definen de modo similar.

Todas las reglas de cálculo de límites que hemos visto en el tema de sucesiones pueden aplicarse al cálculo de límites de funciones cuando la variable tiende a infinito.

Ejercicio 9. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+2}{x^3+4x}$ $\qquad (b)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x+x-2}$ $\qquad (c)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{2x^3-3x^2+6}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$ $\qquad (e)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{x^2-3x}$ $\qquad (f)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{2x+3}\right)^{x+1}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3x+3}\right)^{5x+1}$ $\qquad (h)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{2}{x^2+3}\right)^{x} = e^0$ $\qquad (i)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{3}{2x+5}\right)^{x^2-1}$ $\qquad (k)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{3x+1}\right)^{x}$ $\qquad (l)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{x}$

Solución:

Aplicando las reglas que se vieron para los límites de sucesiones:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+2}{x^3+4x} = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x+x-2} = \infty$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{2x^3-3x^2+6} = -\frac{1}{2}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x} = e^2$

(e) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^{x^2-3x} = e^{-3}$

(f) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2x+3}\right)^{x+1} = e^{\frac{1}{2}}$

(g) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{3x+3}\right)^{5x+1} = e^{\frac{10}{3}}$

(h) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x^2+3}\right)^{x} = e^0 = 1$

(i) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x^2} = \infty$

(j) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{2x+5}\right)^{x^2-1} = e^{-\infty} = 0$

(k) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-3}{3x+1}\right)^{x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\infty} = 0$

(l) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+2}{2x+3}\right)^{x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\infty} = \infty$

♠♠♠♠

2.2. Límite cuando la variable tiende a un número finito.

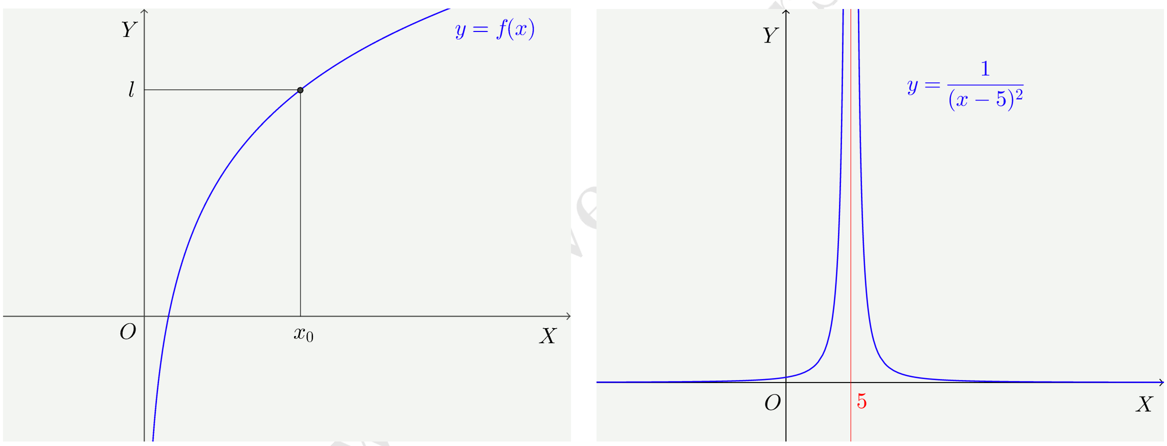


Figura 2.3: Limite cuando la variable tiende a un valor finito

Cuando escribimos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

queremos decir que cuando la variable x toma valores próximos a x_0, pero distintos de x_0, la función $f(x)$ toma valores próximos a l (ver figura 2.3 izquierda). Es importante destacar que el límite de una función en un punto no depende del valor de la función en ese punto sino de los valores que toma en los puntos próximos. Para que haya límite, ni siquiera es necesario que exista la función en ese punto pero debe existir en los puntos próximos.

De forma más precisa (figura 2.4):

Definición 3 (Límite cuando $x \to x_0$). *El límite cuando x tiende a x_0 de la función $f(x)$ es igual a l y se escribe:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

si $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad | \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

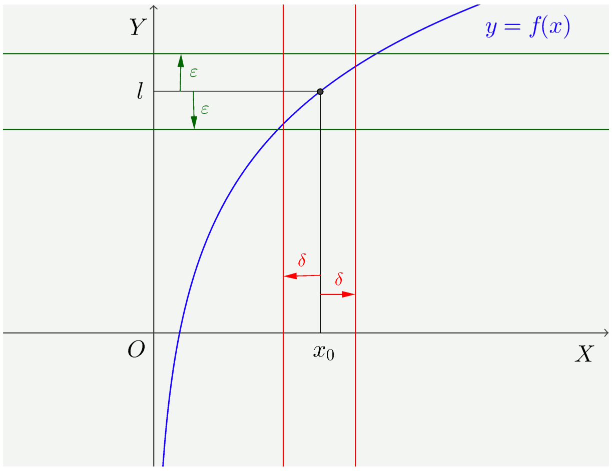


Figura 2.4: Límite cuando x tiende a un número finito

Si en los puntos próximos a x_0 la función toma valores muy grandes, mayores que cualquier número fijado previamente, diremos que la función tiende a infinito (ver figura 2.3 derecha).

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

El límite igual a menos infinito se define de modo similar. Si el límite x tiende a x_0 es infinito (o menos infinito), la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la función.

2.3. Funciones continuas. Casos de discontinuidad.

Con las funciones que utilizamos habitualmente, si tienen límite finito, suele ocurrir que el límite de la función en un punto x_0 coincide con el valor de la función:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

En este caso se dice que la función es continua en x_0.

Destaquemos que para que una función sea continua en x_0 debe cumplirse que:

- Existe el límite de la función en el punto x_0.
- Existe la función en el punto x_0, es decir, el punto x_0 pertenece al dominio de la función.
- Ambos números $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $f(x_0)$ son iguales.

Cuando una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en ese punto. Pueden presentarse los siguientes casos:

◇ **Discontinuidad evitable.** Hemos dicho que el límite depende del valor que toma la función en los puntos próximos al punto pero es independiente del valor de la función en el punto. Así, es posible que una función tenga límite en el punto x_0 pero no exista la función en ese punto (o no coincida con el límite). En este caso se dice que la función presenta una discontinuidad evitable.

$$f \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x_0 \iff \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

no está definida en el punto $x = 0$ (ver figura 2.5). Sin embargo puede demostrarse que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

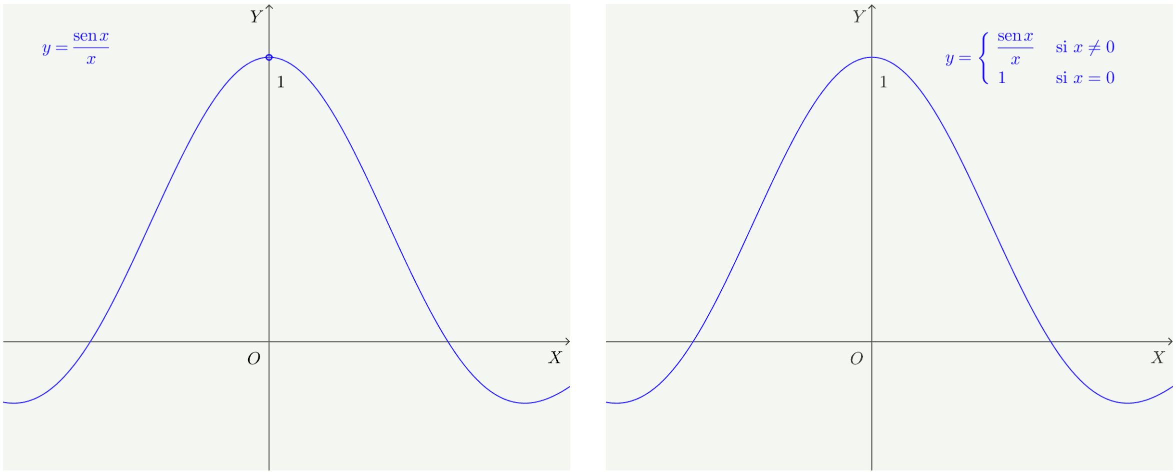


Figura 2.5: Discontinuidad evitable

Se llama discontinuidad evitable porque es posible darle un nuevo valor a la función en el punto de discontinuidad de modo que la nueva función así definida sea continua. Por ejemplo en la función anterior, definiendo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

obtenemos una función continua igual a la anterior en todos los puntos salvo en $x = 0$.

◇ **Salto finito.** Algunas funciones tienen límites diferentes según que la variable se aproxime al punto por la derecha o por la izquierda (ver figura 2.6). Los límites laterales se indican mediante:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \; ; \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

donde los superíndices $-$ y $+$ indican que x tiende a x_0 por la izquierda y por la derecha respectivamente. Que x tiende a x_0 por la izquierda significa que x es próximo a x_0 pero menor que x_0 y que x tiende a x_0 por la derecha significa que x es próximo a x_0 pero mayor que x_0.

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & x < 2 \\ x^2 - 4x + 8 & x \geq 2 \end{cases}$$

tiene un salto finito en $x = 2$, puesto que:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 1 \; ; \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 4$$

◇ **Infinitos.** El tercer tipo de discontinuidad son los infinitos de la función, es decir, los puntos x_0 tales que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

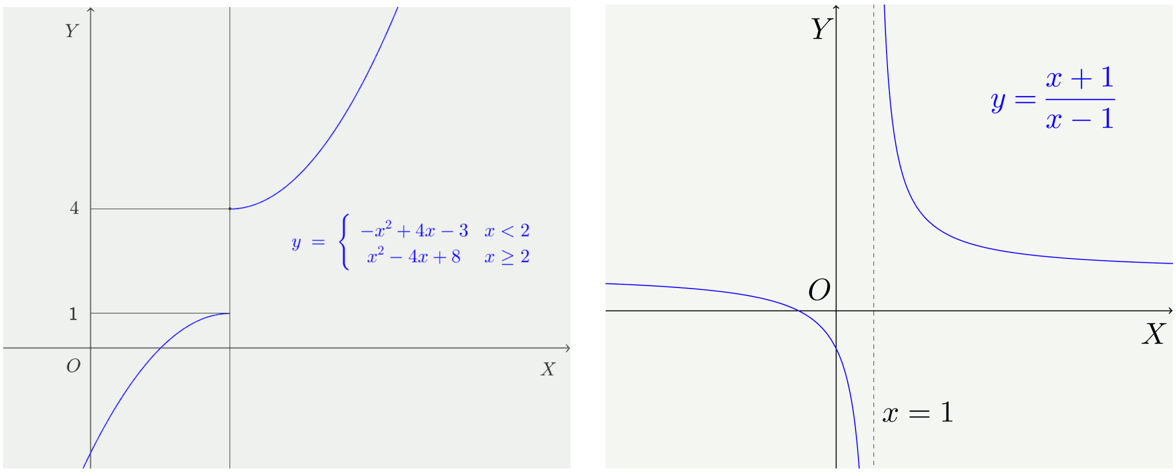


Figura 2.6: Discontinuidades por salto finito y por límite infinito

tiene un punto de discontinuidad en $x = 1$ ya que (ver figura 2.6):

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty$$

◇ **Discontinuidad esencial.** Se produce este tipo de discontinuidad cuando no existen los límites laterales ni son infinitos. Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

no tiene límite cuando x tiende a 0 (figura 2.7). Podemos ver que, cuando la variable es muy próxima a cero, la función oscila rápidamente entre -1 y 1 con una frecuencia que tiende a infinito a medida que x tiende a cero.

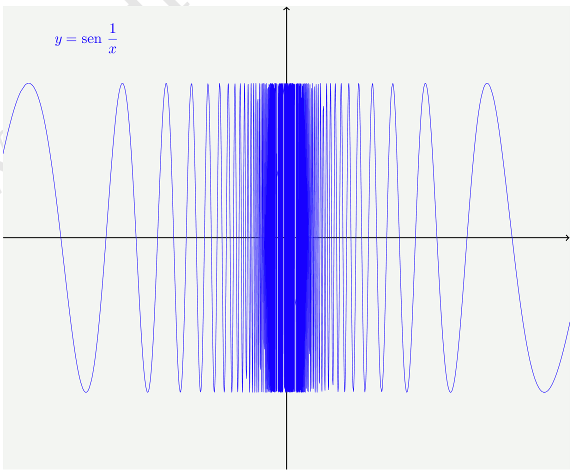


Figura 2.7: Discontinuidad esencial

Ejercicio 10. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3+x+2}{x^2-2x-3}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad dela función son $x = -1$ y $x = 3$.

El límite de la función cuando x tiende a -1 es:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+2}{x-3}=-1$$

Puesto que existe el límite, en $x=-1$ la discontinuidad es evitable.

Cuando x tiende a 3:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+x+2}{x^2-2x-3}=\infty$$

La función presenta un salto infinito en $x=3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 11. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2+3x}{x-1} & x<0\\ a & x=0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$.

Solución:

Para que la función sea continua en $x=0$, su límite cuando x tiende a cero debe ser igual al valor de la función en cero. Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+3x}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=0$$

Así pues, el límite de la función es igual a cero. Si la función es continua, este límite debe coincidir con el valor de la función en cero. Por consiguiente a debe valer cero.

♠♠♠♠

2.4. Asíntotas.

Consideraremos tres tipos de asíntota:

- **Asíntotas verticales** (ver figura 2.6 derecha):

  $$x=x_0 \text{ asíntota vertical de } f(x) \iff \lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$$

  Por ejemplo la función:

  $$y=\frac{x+1}{x-1}$$

  tiene una asíntota $x=1$ puesto que:

  $$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\infty$$

- **Asíntotas horizontales** (ver figura 2.8 izquierda):

  $$y=y_0 \text{ asíntota horizontal de } f(x) \iff \lim_{x\to\infty}f(x)=y_0$$

  Por ejemplo, $y=0$ es una asíntota horizontal de la función $y=\dfrac{5x}{x^2+7}$ porque:

  $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x^2+7}=0$$

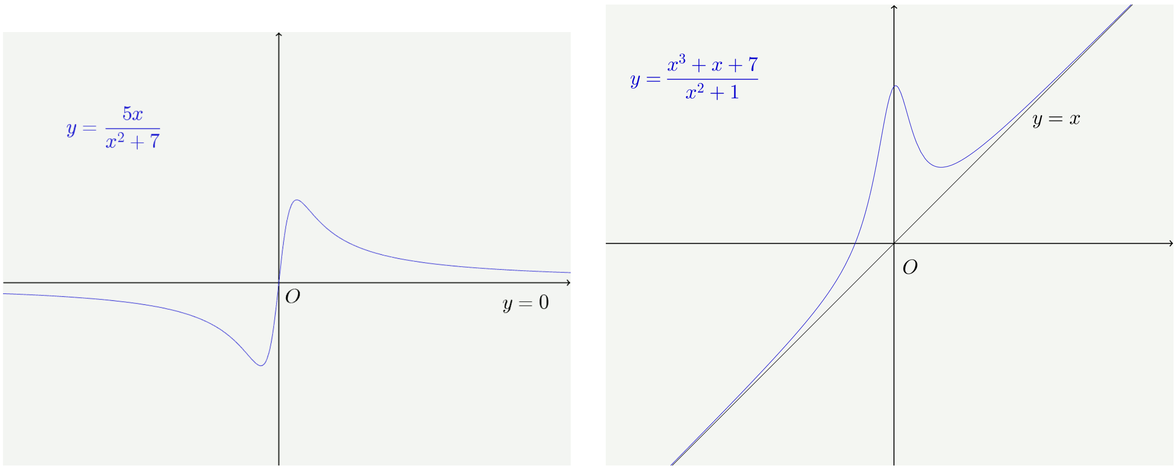


Figura 2.8: Asíntota horizontal y oblicua

- **Asíntotas oblicuas** (ver figura 2.8 derecha):

$$y = mx + b \text{ asíntota oblicua de } f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0$$

Puesto que y (la ordenada de la asíntota) y $f(x)$ son iguales cuando x tiende a infinito, podemos calcular la pendiente m de la asíntota, del siguiente modo:

$$y = mx + b \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{y-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Una vez calculada la pendiente, se obtiene la ordenada en el origen b:

$$y = mx + b \quad \Longrightarrow \quad b = y - mx = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

Por ejemplo, para obtener la asíntota de la función:

$$f(x) = \frac{x^3+x+7}{x^2+1}$$

se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3+x+7}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \cdot \frac{x^3+x+7}{x^3+x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x+7}{x^2+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+7-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{x^2+1} = 0$$

de forma que la asíntota es $y = x$.

Ejercicio 12. Calcular las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$.

Solución:

Cuando x tiende a infinito, la pendiente de la asíntota es:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x} = 1$$

y su ordenada en el origen:

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-4x-5} - x\right) = -2$$

La asíntota oblicua por la derecha es $y = x - 2$.

De forma similar, cuando x tiende a $-\infty$ la pendiente de la asíntota es:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x} = -1$$

y su ordenada en el origen:

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x-5}+x\right) = 2$$

La asíntota oblicua por la izquierda es $y = -x + 2$.

♠♠♠♠

2.5. Nueva definición de continuidad

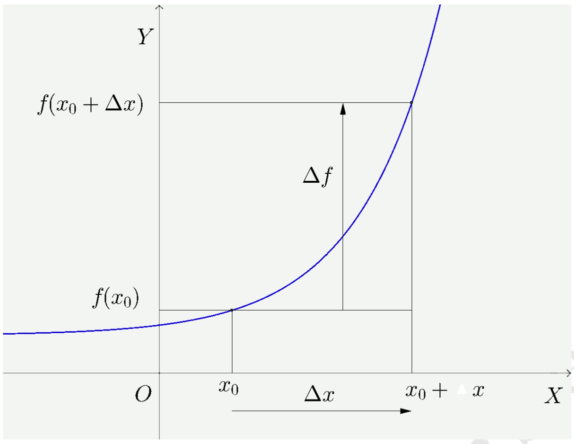


Figura 2.9: Función continua

Llamemos $x = x_0 + \Delta x$ (figura 2.9):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)\\
&\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0\\
&\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0
\end{aligned}$$

donde se ha llamado Δf a la variación de la función f cuando la variable x cambia en la cantidad Δx. Esta nueva definición puede expresarse de la siguiente forma: *una función es continua, si a variaciones infinitesimales de la variable dependiente, corresponden variaciones infinitesimales de la variable dependiente.*

2.6. Reglas para el cálculo de límites

Límites cuando $x \to \infty$

Reglas generales: Para calcular estos límites pueden aplicarse las siguientes reglas:

$$\infty \pm k = \infty \qquad k\cdot\infty = \infty \quad (k \neq 0) \qquad \frac{\infty}{k} = \infty \qquad \frac{k}{0} = \infty$$

$$\infty^k = \begin{cases}\infty & \text{si } k > 0\\ 0 & \text{si } k < 0\end{cases} \qquad r^\infty = \begin{cases}\infty & \text{si } r > 1\\ 0 & \text{si } 0 \leq r < 1\end{cases}$$

Cuando no se pueden aplicar esas reglas, los límites se llaman indeterminados y es preciso aplicar otros procedimientos. Son límites indeterminados los del tipo:

$$\infty - \infty \qquad 0\cdot\infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty \qquad 0^0$$

Funciones polinómicas y racionales: Las indeterminaciones que se presentan se resuelven teniendo en cuenta solamente los términos de mayor grado de cada polinomio. Para calcular el límite de la diferencia de dos fracciones que tienden a infinito se hace previamente la resta.

Otras funciones: Si hay que comparar infinitos de distintos tipos en indeterminaciones del tipo ∞/∞ o $\infty - \infty$ se tiene en cuenta que los infinitos más grandes son los exponenciales (a^x), después los potenciales (x^n) y finalmente los logarítmicos ($\log_a x$)

Límites cuando x tiende a un número c

Regla general: Se aplica la definición de función continua, es decir, se sustituye x por c.

Límites infinitos: Si al calcular el límite de una fracción por el procedimiento anterior, el denominador es cero y el numerador es distinto de cero, el límite es infinito. Para saber si es $+\infty$ o $-\infty$, se calculan los límites laterales.

Límites indeterminados: Si al calcular el límite de un cociente de polinomios resulta que, tanto el numerador como el denominador tienden a cero (indeterminación del tipo $0/0$), puede resolverse esta indeterminación dividiendo numerador y denominador por $x - c$.

2.7. Dos límites importantes

El límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

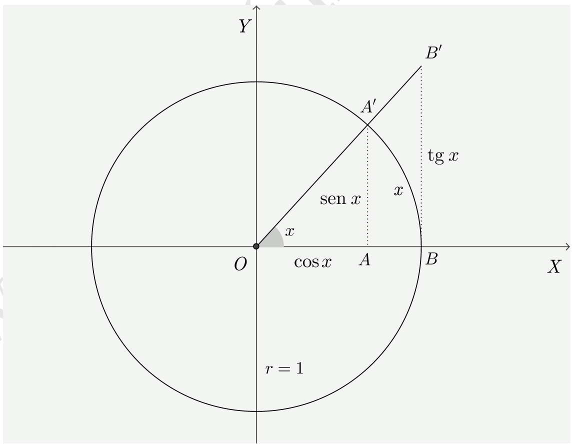


Figura 2.10: Límite de $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

En la figura 2.10 se ha representado un ángulo x sobre una circunferencia de radio 1. Si el radio es igual a la unidad, la longitud del arco coincide con la medida del ángulo en radianes. El seno y el coseno del ángulo son iguales a la ordenada y la abscisa del extremo del arco y así se han representado en la figura. También se ha representado un segmento de longitud igual a $\operatorname{tg} x$.

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

y dividiendo por $\operatorname{sen} x$:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \quad \Longrightarrow \quad 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Cuando $x \to 0$:

$$1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

y también:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{1} = 1$$

El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

La base de los logaritmos neperianos (ln) es el número e. Este número se define como el límite de la siguiente función:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

o cambiando x por $1/x$:

$$e = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

Aplicaciones al cálculo de límites

El hecho de que los dos límites que acabamos de calcular sean iguales a 1 quiere decir que cuando x es próximo a 0, las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\ln(1+x)$ son aproximadamente iguales a x. Esto lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\text{si } x \to 0 \quad \operatorname{sen} x \sim x \quad \text{y} \quad \ln(1+x) \sim x$$

A partir de estas aproximaciones podemos obtener valores aproximados para otras funciones cuando $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &\sim x \\ \operatorname{arsen} x &\sim x \\ \operatorname{artg} x &\sim x \\ 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\ e^x - 1 &\sim x \\ (1 \pm x)^n &\sim 1 \pm nx \end{aligned}$$

Estas aproximaciones pueden utilizarse para calcular límites. Pueden cometerse errores si se sustituye una función por su equivalente en una diferencia y el resultado es cero.

A partir del límite del logaritmo puede obtenerse una expresión útil para calcular límites indeterminados del tipo 1^∞. Hemos visto que:

$$x \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln(1+x) \sim x$$

Si llamamos $1 + x = u$ esto es equivalente a:

$$u \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln u \sim u - 1$$

Ahora supongamos que $u \to 1$ y $v \to \infty$:

$$u \to 1, \quad v \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim u^v = e^{v \ln u} = e^{\lim (u-1)v}$$

2.8. Propiedades de las funciones continuas

Admitiremos sin demostración los siguientes teoremas relativos a funciones continuas:

Teorema 1. *Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, en un entorno de x_0 la función toma el mismo signo que en x_0.*

Teorema 2. *Si f es continua en x_0 está acotada en un entorno de x_0.*

Teorema 3. *Una función continua en un intervalo cerrado, esta acotada en ese intervalo.*

Teorema 4 (Bolzano)**.** *Si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo a y b entonces existe un punto interior del intervalo ξ en que el valor de la función es cero (figura 2.11):*

$$f \text{ continua en } [a,b] \text{ y } \operatorname{signo} f(a) \neq \operatorname{signo} f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,b) \mid f(\xi) = 0$$

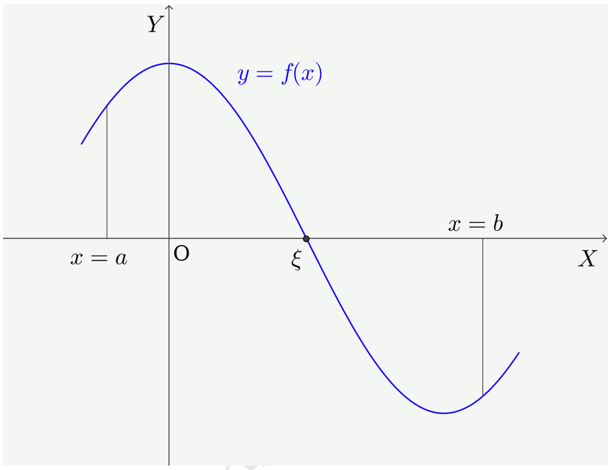


Figura 2.11: Teorema de Bolzano

Como consecuencia del teorema de Bolzano se verifica también que:

Teorema 5 (Darboux)**.** *Si f es una función continua en $[a,b]$ f toma en el interior de ese intervalo todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.*

Teorema 6 (Weierstrass)**.** *Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.*

Si el máximo o mínimo absoluto de la función se encuentra en el interior del intervalo será también un máximo o mínimo relativo y lo podremos encontrar por los procedimientos que veremos en el tema siguiente. Sin embargo, es preciso tener presente que el máximo y el mínimo absoluto de la función también pueden encontrarse en los extremos del intervalo.

Ejercicio 13. Demostrar que la ecuación $e^{-3x} + 4x - 2 = 0$ tiene, al menos, una solución real en el intervalo $[0,1]$.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función $f(x) = e^{-3x} + 4x - 2$ se anula en el intervalo $(0,1)$. Esta función es continua en el intervalo $[0,1]$ puesto que es suma de funciones continuas en ese intervalo. Además:

$$f(0) = e^0 + 4 \cdot 0 - 2 = -1 < 0$$

$$f(1) = e^{-3} + 4 \cdot 1 - 2 = e^{-3} + 2 > 0$$

De acuerdo con el teorema de Bolzano existe un número ξ comprendido entre 0 y 1 en el que f vale 0. Entonces ξ es una solución de la ecuación.

♠♠♠♠

Tema 3

Derivadas

3.1. Función derivada

En temas anteriores se ha explicado el concepto de pendiente de una recta. Dada una recta $y = mx + b$, la pendiente m es el cociente de las variaciones de y y de x entre dos puntos cualesquiera de la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esta idea puede generalizarse para una curva $y = f(x)$ de la forma que veremos a continuación. La diferencia fundamental es que la pendiente de la curva que llamaremos derivada no es constante sino que varía de un punto a otro de la curva.

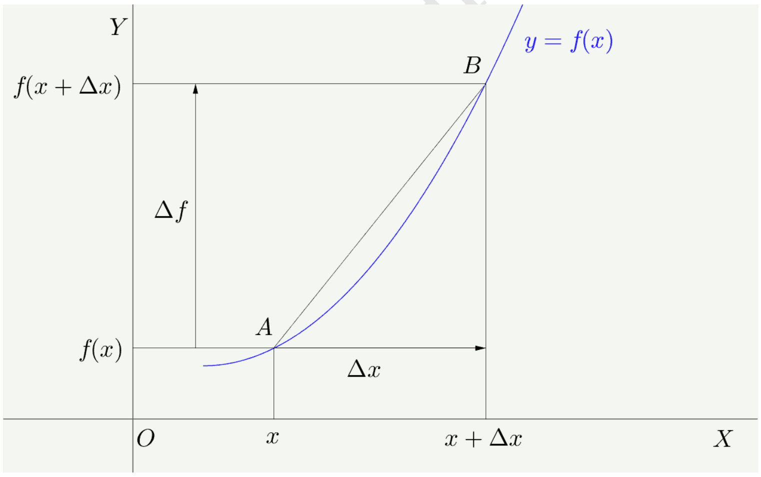


Figura 3.1: Derivada de una función

Sea una función f. Su representación gráfica es la curva de ecuación $y = f(x)$. Sean A y B dos puntos de la curva de abscisas x y $x + \Delta x$ (ver figura 3.1). Cuando la variable independiente cambia en una cantidad Δx, la función varía en la cantidad:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

La **tasa de variación media** de la función en este intervalo, o **pendiente media** de la curva correspondiente se define como el cociente de los incrementos de la función y de la variable entre los dos puntos de la curva:

$$m_{AB} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La pendiente de la curva en un punto se define mediante un paso al límite.

La **tasa de variación instantánea** de una función o **pendiente de la curva** en un punto es la tasa de variación media entre dos puntos cuando la distancia entre ellos tiende a cero, es decir, el límite de la expresión anterior cuando Δx tiende a cero:

$$m_A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Veamos con más precisión el significado de la pendiente de una curva. La **tangente** a una curva en un punto A es la recta que une dos puntos de la curva A y B cuando la distancia entre ambos tiende a cero. La pendiente media de una curva entre dos puntos A y B, es la pendiente de la recta que une los dos puntos de la curva (ver figura 3.2). Al aproximarse los dos puntos, la pendiente media pasa a ser la pendiente en el punto A, y la recta AB se transforma en la tangente a la curva en el punto A. Así pues, la pendiente de una curva es la pendiente de la recta tangente a la curva.

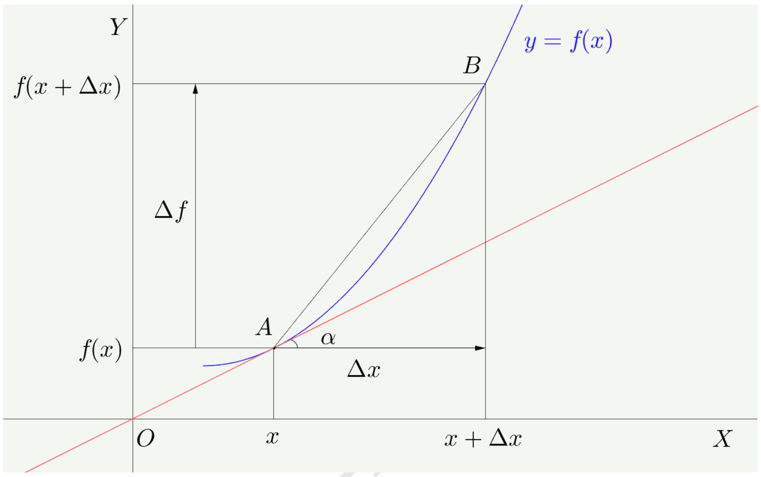


Figura 3.2: Interpretación geométrica de la derivada

De forma general, la **derivada** de la función $f(x)$ en un punto cualquiera x se define como el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El incremento de la variable se suele representar también por h o por $\mathrm{d}x$. La derivada de la función $f(x)$ se representa por $f'(x)$ y también por $\mathrm{D}\, f(x)$ o $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

La derivada de una función debe interpretarse geométricamente como la pendiente de la curva que representa la función o como la pendiente de la recta tangente a esa curva.

Ejercicio 14. Calcular la derivada de la función $y = x^2$.

Solución:

De acuerdo con la definición:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

♠♠♠♠

Teorema 7. *Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.*

Demostración. En efecto:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x)\cdot\Delta x=0$$

□

El recíproco no es cierto, la función $f(x)=|x|$ es continua en $x=0$ y, sin embargo, no es derivable en ese punto.

Ejercicio 15. Demostrar que la función $y=\sqrt[3]{x^2}$ no es derivable en $x=0$.

Solución:

Esta función es continua en todo su dominio puesto que se trata de una función potencial. Veamos que no tiene derivada en $x=0$. La función derivada es:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{h}$$

En el punto de abscisa $x=0$:

$$y'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(0+h)^2}-\sqrt[3]{0^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{2}{3}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=\infty$$

♠♠♠♠

Puesto que la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada de la función en el punto, la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa x_0 (y ordenada $f(x_0)$) es:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Ejercicio 16. Calcular la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=x^2$ en el punto de abscisa $x_0=\frac{1}{3}$.

Solución:

La ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto. En un ejercicio anterior calculamos la función derivada $y'=2x$. La pendiente de la tangente es:

$$m=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Conocido el punto y la pendiente, puede calcularse la ecuación de la tangente. En la forma punto-pendiente:

$$y-\frac{1}{9}=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

♠♠♠♠

3.2. Reglas de derivación

Las derivadas de las funciones elementales pueden obtenerse a partir de la definición; los límites pueden calcularse con ayuda de las técnicas que se han visto en el tema anterior. A continuación se deducen algunas de estas derivadas:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\sqrt{x}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Se ha multiplicado numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador para poder efectuar la diferencia.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} \ln x &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{\cancel{h}}{x} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Se ha aplicado la aproximación $\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \sim \frac{h}{x}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} \operatorname{sen} x &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2} \operatorname{sen}\frac{x+h-x}{2}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2} \operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2}\cos\frac{2x+h}{2} \cdot \frac{\cancel{h}}{\cancel{2}}}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} = \cos x
\end{aligned}$$

Donde se ha aplicado la aproximación $\operatorname{sen}\frac{h}{2} \sim \frac{h}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\, e^x &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cancel{h}}{\cancel{h}} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Aquí hemos tenido en cuenta la aproximación $e^h - 1 \sim h$.

A partir de las propiedades de los límites y de la continuidad de las funciones derivables pueden demostrarse las siguientes propiedades:

- ◇ Suma y diferencia de funciones: $\mathrm{D}\,(u \pm v) = u' \pm v'$
- ◇ Producto de funciones: $\mathrm{D}\,(u \cdot v) = u'v + v'u$
- ◇ Cociente de funciones: $\mathrm{D}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- ◇ Función compuesta: $\mathrm{D}\, f[g(x)] = f'[g(x)]\, g'(x)$

En la tabla 3.2, en la que hemos representado mediante u y v funciones cualesquiera de x y mediante K una constante, se recogen las reglas de derivación:

REGLAS GENERALES	FUNCIONES SIMPLES	FUNCIONES COMPUESTAS
	$\mathrm{D}[K] = 0$	
$\mathrm{D}[u \pm v] = u' \pm v'$	$\mathrm{D}[x^n] = nx^{n-1}$	$\mathrm{D}[u^n] = nu^{n-1}u'$
	$\mathrm{D}[\ln x] = \dfrac{1}{x}$	$\mathrm{D}[\ln u] = \dfrac{1}{u}u'$
$\mathrm{D}[Ku] = Ku'$	$\mathrm{D}[\log_a x] = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathrm{D}[\log_a u] = \dfrac{1}{u \ln a}u'$
	$\mathrm{D}[e^x] = e^x$	$\mathrm{D}[e^u] = e^u u'$
$\mathrm{D}[uv] = u'v + v'u$	$\mathrm{D}[a^x] = a^x \ln a$	$\mathrm{D}[a^u] = a^u (\ln a) u'$
	$\mathrm{D}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\mathrm{D}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$
$\mathrm{D}\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$\mathrm{D}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\mathrm{D}[\cos u] = (-\operatorname{sen} u)u'$
	$\mathrm{D}[\operatorname{tg} x] = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{D}[\operatorname{tg} u] = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$
$\mathrm{D}[f(u)] = f'(u)u'$	$\mathrm{D}[\operatorname{arsen} x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{D}[\operatorname{arsen} u] = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
	$\mathrm{D}[\arccos x] = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{D}[\arccos u] = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
	$\mathrm{D}[\operatorname{artg} x] = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{D}[\operatorname{artg} u] = \dfrac{1}{1+u^2}u'$

Cuadro 3.1: Reglas de derivación

Ejercicio 17. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

- $y = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$

  $$y' = 3x^2 - 6x + 7$$

- $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$

  $$y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

- $y = \operatorname{sen}^2 x$

  $$y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

- $y = \operatorname{sen}(x^2)$

  $$y' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

- $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

  $$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right)$$

- $y = x^x = e^{x \ln x}$

  $$y' = e^{x \ln x}\left(\ln x + \frac{1}{x}x\right) = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

♠♠♠♠

3.3. Funciones crecientes y decrecientes

Una función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo si a valores mayores de la variable corresponden valores mayores de la función:

$$f \text{ creciente} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

De forma similar, una función $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo si a valores mayores de la variable corresponden valores menores de la función:

$$f \text{ decreciente} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Los puntos en que la función pasa de creciente a decreciente o de decreciente a creciente se llaman,

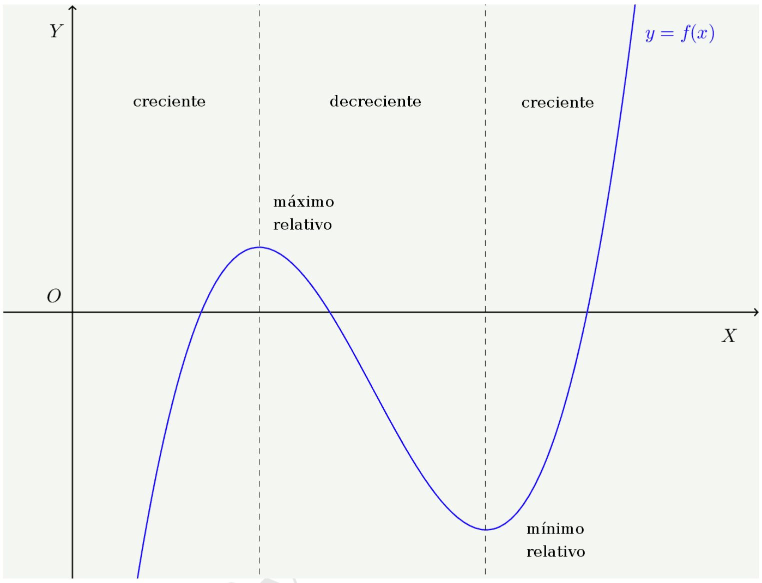


Figura 3.3: Intervalos de crecimiento y decrecimiento

respectivamente, **máximos y mínimos relativos** o **máximos y mínimos locales** (ver figura 3.3).

La derivada de la función permite obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para funciones derivables se cumple el siguiente teorema:

Teorema 8. *Si la derivada de la función $f(x)$ es positiva (negativa) en x_0, la función es creciente (decreciente) en x_0:*

$$f'(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ creciente en } x_0; \qquad f'(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ decreciente en } x_0$$

y como consecuencia, la derivada en los máximos y mínimos relativos debe ser cero.

Según el teorema anterior, los máximos y mínimos relativos de la función deben buscarse entre los puntos de derivada cero. Sin embargo, esto no significa que todos los puntos de derivada cero sean máximos o mínimos.

Geométricamente, el que la derivada en un punto sea cero quiere decir que en ese punto la recta tangente es paralela al eje de abscisas, son puntos de tangente horizontal. Pueden darse varios casos (ver figura 3.4).

Sea $f'(x_0) = 0$. Para determinar el comportamiento de la función en ese punto podemos utilizar el siguiente criterio:

- Si la función es creciente a la izquierda y a la derecha de x_0, la función es creciente en x_0.
- Si la función es decreciente a la izquierda y a la derecha de x_0, la función es decreciente en x_0.

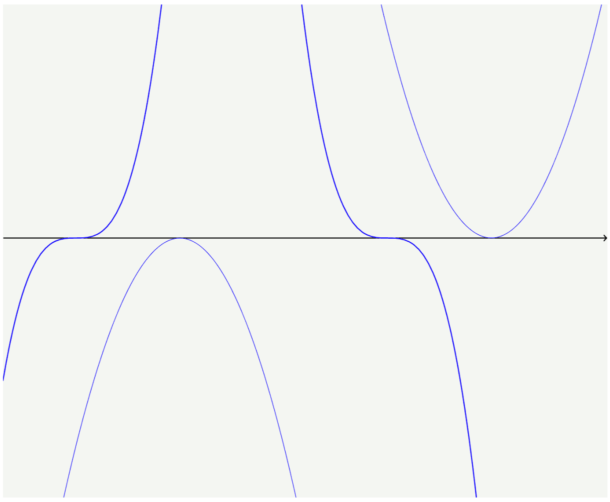


Figura 3.4: Puntos de derivada cero

- ⋄ Si la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de x_0, la función presenta un máximo relativo en x_0.

- ⋄ Si la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha de x_0, la función presenta un mínimo relativo en x_0.

También podemos hacer uso de los siguientes teoremas:

Teorema 9. *Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, x_0 la función presenta un máximo relativo en x_0.*

Demostración. Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f'(x)$ es decreciente en x_0. Puesto que en ese punto la derivada es cero, $f'(x)$ deberá ser positiva a la izquierda y negativa a la derecha. La función pasa de creciente a decreciente y, por consiguiente, tiene un máximo en x_0. □

De forma similar:

Teorema 10. *Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, x_0 la función presenta un mínimo relativo en x_0.*

Ejercicio 18. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función:

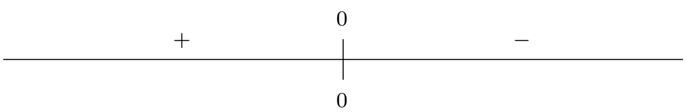
$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = -xe^{-x}$$

El signo de la derivada lo podemos expresar mediante el siguiente esquema:



Así pues, la función es creciente en $(-\infty, 0)$, tiene un máximo en $x = 0$ y es decreciente en $(0, \infty)$.

♠♠♠♠

3.4. Concavidad y convexidad

Una función $f(x)$ es **cóncava** en el punto x_0 si en los puntos próximos a x_0 la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 queda por debajo de ella:

$$f \text{ cóncava en } x_0 \Rightarrow f(x) - y_t = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] > 0$$

Una función $f(x)$ es **convexa** en el punto x_0 si en los puntos próximos a x_0 la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 queda por encima de ella:

$$f \text{ convexa en } x_0 \Rightarrow f(x) - y_t = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] < 0$$

Teorema 11. *Si $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es cóncava en x_0*

Teorema 12. *si $f''(x_0) < 0$, la función $f(x)$ es convexa en x_0*

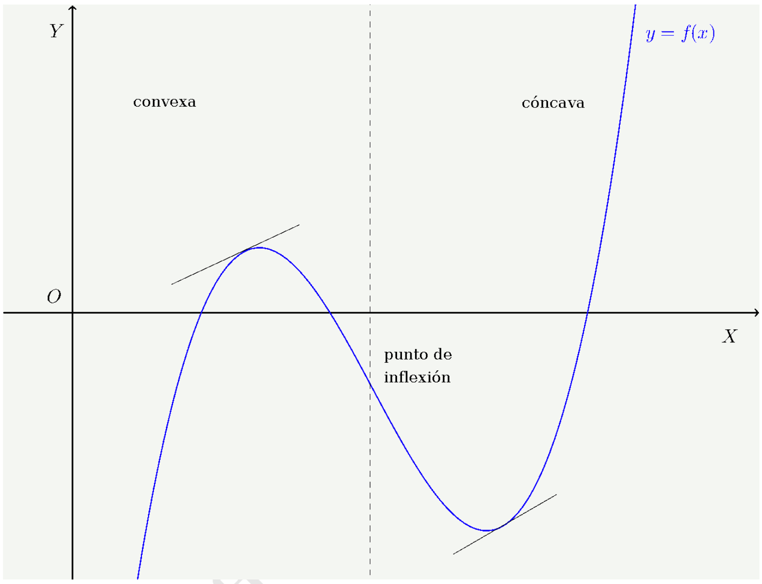


Figura 3.5: Concavidad y convexidad

Los puntos en que la función no es cóncava ni convexa se llaman **puntos de inflexión** de la función. En esos puntos la derivada segunda es igual a cero.

Teorema 13. *si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, x_0 es un punto de inflexión.*

Ejercicio 19. Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{(6x + 5)(x + 5) - (3x^2 + 5x - 20)}{(x + 5)^2} = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3 \cdot \frac{(2x + 10)(x + 5)^2 - 2(x + 5)(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^4} \\ &= 3 \cdot \frac{(2x + 10)(x + 5) - 2(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^3} \\ &= 3 \cdot \frac{20}{(x + 5)^3} \end{aligned}$$

El signo de esta fracción depende solamente del denominador. La función es convexa para $x < -5$ y es cóncava para $x > -5$. En $x = -5$ hay una asíntota vertical.

♠♠♠♠

3.5. Diferencial de una función

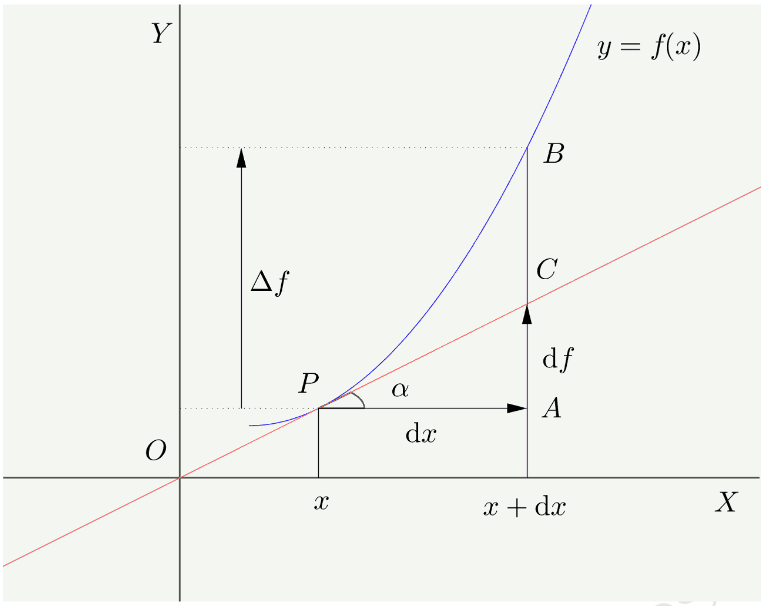


Figura 3.6: Diferencial de una función

En la figura 3.6 se ha representado una función derivable $f(x)$ así como la tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto cualquiera de abscisa x. Si se incrementa la variable en una cantidad $\mathrm{d}x$ la función cambia en una cantidad Δf.

Se llama diferencial de la función $\mathrm{d}f$ al producto de la derivada por el incremento de la variable:

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Geométricamente, la diferencial es el incremento sobre la recta tangente correspondiente al incremento $\mathrm{d}x$ de la variable.

El incremento de la variable lo hemos representado por Δx o por $\mathrm{d}x$, es decir Δx y $\mathrm{d}x$ es lo mismo. Sin embargo, en general, Δf y df son números distintos. En la figura 3.6 Δf es igual a la longitud del segmento AB mientras que $\mathrm{d}f$ es igual a AC.

Pese a ser diferentes Δf y df son muy próximos para valores pequeños de dx. Así, la diferencia $\Delta f - \mathrm{d}f$ tiende a cero más rápidamente que $\mathrm{d}x$ cuando $\mathrm{d}x$ tiende a cero:

$$\lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \left(\frac{\Delta f}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right) = f'(x) - f'(x) = 0$$

Es por esta razón que se suele interpretar $\mathrm{d}f$ como el incremento de la función correspondiente a un incremento infinitesimal de la variable $\mathrm{d}x$.

3.6. Propiedades de las funciones derivables

Teorema 14 (Teorema de Rolle). *Sea f una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que cumple que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe un punto de (a, b) en el que la derivada vale cero.*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \implies \exists \xi \in (a,b) \mid f'(\xi) = 0$$

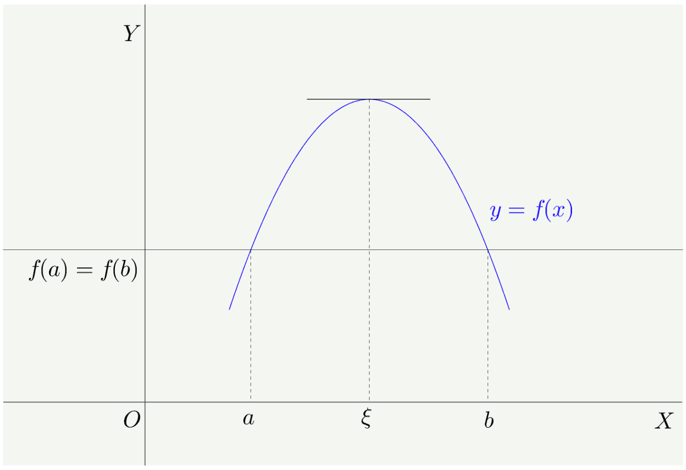


Figura 3.7: Teorema de Rolle

Geométricamente, el teorema de Rolle significa que en una curva, entre dos puntos de de igual ordenada, debe haber al menos un punto de tangente horizontal.

El teorema de Rolle se deduce fácilmente del teorema de Weierstrass: por ser la función f continua en $[a,b]$ tiene un máximo y un mínimo absoluto en ese intervalo. Pueden darse dos casos:

- Que el máximo y el mínimo absolutos se encuentren en los extremos del intervalo. Como la función toma el mismo valor en los dos extremos el máximo y el mínimo serán iguales y, por consiguiente, la función será constante. En este caso el teorema se cumple porque una función constante tiene derivada cero en todos sus puntos.
- Que o bien el máximo o bien el mínimo absoluto se encuentre en el interior del intervalo. En este caso el máximo o mínimo absoluto será a su vez máximo o mínimo relativo y la derivada en ese punto será cero (ver figura 3.7).

Como consecuencia del teorema de Rolle resultan las siguientes propiedades:

- Si f es una función derivable entre dos ceros de la función debe haber al menos un cero de la derivada.
- Si la derivada no tiene ceros, la funciones tiene a lo sumo un cero.

Teorema 15 (Teorema del valor medio, de Lagrange o de los incrementos finitos)**.** *Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe un punto $\xi \in (a,b)$ que cumple que:*

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

Demostración. Escojamos λ de forma que la función $F(x) = f(x) - \lambda x$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle. Desde luego, se cumplen las condiciones de continuidad y derivabilidad. Para que se cumpla la tercera condición:

$$F(a) = f(a) - \lambda a$$
$$F(b) = f(b) - \lambda b$$
$$F(a) = F(b) \implies f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \implies \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Para este valor de λ, como consecuencia del teorema de Rolle, existe $\xi \in (a,b)$ tal que:

$$F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \lambda = 0 \implies f'(\xi) = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

□

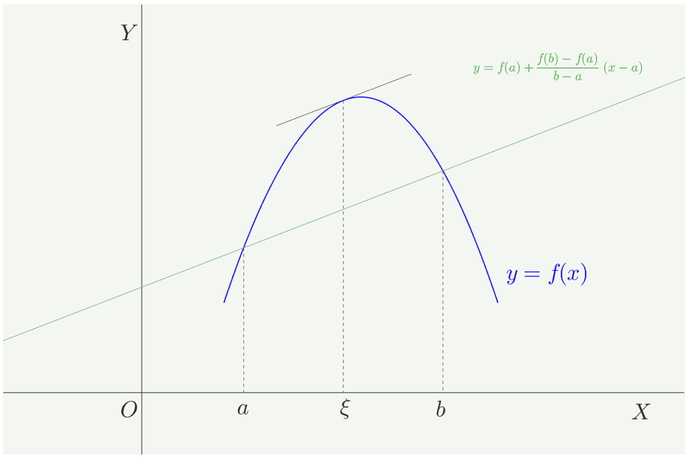


Figura 3.8: Teorema del valor medio

Consecuencias del teorema del valor medio:

- Si $f'(x) > 0$ en (a, b), $f(x)$ es creciente en (a, b). En efecto, sean x_1, x_2, dos puntos del intervalo (a, b). Aplicando el teorema del valor medio:

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 \quad &\Longrightarrow \quad f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad \text{puesto que } f'(\xi) > 0 \\ & \quad f(x_2) > f(x_1) \end{aligned}$$

  De la misma forma se demuestra que si $f'(x) < 0$ la función es decreciente.

- Si una función tiene derivada cero en un intervalo (a, b) es constante en ese intervalo o, lo que es lo mismo, toma el mismo valor en todos sus puntos.

  En efecto, sean x_1 y x_2 dos puntos del intervalo (a, b). En el intervalo $[x_1, x_2]$ la función cumple las condiciones del teorema del valor medio de forma que:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)\ ; \qquad \xi \in (x_1, x_2)$$

  y como la derivada es cero en el intervalo, resulta $f(x_2) = f(x_1)$.

- Si dos funciones tienen la misma derivada, su diferencia es constante.

  En efecto, si $f'(x) = g'(x)$, la diferencia $F(x) = f(x) - g(x)$ tiene derivada cero y de acuerdo con el apartado anterior es constante.

Teorema 16 (Teorema de Cauchy)**.** *Sean f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos además que la derivada de g no se anula en el intervalo (a, b). Existe un punto $\xi \in (a, b)$ que cumple que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Demostración. En efecto, el denominador del segundo miembro es distinto de cero y también el del primer miembro puesto que, por el teorema del valor medio:

$$g(b) = g(a) + g'(c)(b - a) \neq g(a)$$

Formemos la función:

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

y escojamos λ de forma que pueda aplicarse el teorema de Rolle a $F(x)$. Para ello:

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a)$$
$$F(b) = f(b) - \lambda g(b)$$

$$F(a) = F(b) \quad \Longrightarrow \quad f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Como consecuencia del teorema de Rolle, existe un $\xi \in (a, b)$ tal que $F'(\xi) = 0$. Es decir:

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

Teorema 17 (Regla de l'Hopital)**.** *Sean f y g funciones continuas y derivables en un entorno del punto x_0. Supongamos que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y que la derivada de g no se anulan en un entorno reducido de x_0. Entonces:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración. En efecto, puesto que $f(x_0) = g(x_0) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} && \text{(por el teorema de Cauchy)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} && \text{(puesto que existe el límite de } \frac{f'(x)}{g'(x)}\text{)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

La justificación del último paso de la demostración es el siguiente: ξ es un número comprendido entre x y x_0, de forma que, cuando x tiende a x_0 también ξ tiende a x_0. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

3.7. Teorema de Taylor

Sea f una función n veces derivable en el punto $x = a$. El polinomio de Taylor de grado n de esta función en ese punto (también llamado desarrollo de Taylor en el punto) es un polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \ldots + a_n(x - a)^n$$

tal que:

$$\begin{aligned} P(a) &= f(a) \\ P'(a) &= f'(a) \\ P''(a) &= f''(a) \\ \ldots & \quad \ldots \\ P^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Es fácil ver que, para que se cumpla esto, el polinomio debe ser:

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

El desarrollo de Taylor de una función en torno al punto $a = 0$ se llama desarrollo de McLaurin. Así, el polinomio de McLaurin de la función f sería:

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ejercicio 20. Obtener el desarrollo de McLaurin de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Solución:

Todas las derivadas de la función exponencial son iguales a e^x. Por consiguiente, las derivadas en el punto $x = 0$ valen 1. El desarrollo es:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Las derivadas de la función seno son:

$$\begin{array}{ll|ll}
y' = \cos x & y'(0) = 1 & y'' = -\operatorname{sen} x & y''(0) = 0 \\
y''' = -\cos x & y'''(0) = -1 & y^{(4)} = \operatorname{sen} x & y^{(4)}(0) = 0 \\
y^{(5)} = \cos x & y'(0) = 1 & y^{(6)} = -\operatorname{sen} x & y''(0) = 0
\end{array}$$

Y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 0 = 0$ el desarrollo queda:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

Procediendo de la misma manera con la función coseno:

$$\begin{array}{ll|ll}
y' = -\operatorname{sen} x & y'(0) = 0 & y'' = -\cos x & y''(0) = -1 \\
y''' = \operatorname{sen} x & y'''(0) = 0 & y^{(4)} = \cos x & y^{(4)}(0) = 1 \\
y^{(5)} = -\operatorname{sen} x & y'(0) = 0 & y^{(6)} = -\cos x & y^{(6)}(0) = -1
\end{array}$$

Puesto que, además, $\cos 0 = 1$, el desarrollo del coseno es:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2|}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Obsérvese que en el desarrollo de la función seno que es impar solamente hay potencias impares y en la función coseno (par) solamente hay exponentes pares.

♠♠♠♠

El teorema de Taylor permite estimar el error que se comete al sustituir una función por su polinomio de Taylor.

Teorema 18 (Teorema de Taylor). *Sea $f(x)$ una función $n+1$ veces derivable en un entorno del punto $x = a$. En estas condiciones, existe un punto ξ comprendido entre a y x tal que:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Es decir, la diferencia entre una función y su polinomio de Taylor de grado n puede expresarse como:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \; ; \qquad \xi \in (a, x)$$

Demostración. Vamos a aplicar reiteradamente el teorema de Cauchy a las funciones $F(x) = f(x) - P(x)$ y $G(x) = (x-a)^{n+1}$. La primera función es la diferencia entre la función $f(x)$ y su polinomio de Taylor en el punto a. Ambas funciones y sus n primeras derivadas son nulas en el punto a. Entonces, por el teorema de Cauchy:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \qquad \xi_1 \in (a, x)$$

Volvemos a aplicar el teorema de Cauchy. Puesto que las derivadas son cero en el punto a:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \qquad \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x)$$

Prosiguiendo el proceso llegaremos a:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \qquad \xi \in (a, x)$$

Teniendo en cuenta que $F(x)$ es la diferencia entre la función y su polinomio de Taylor, que $G(x) = (x-a)^{n+1}$ y que $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ resulta:

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \; ; \qquad \xi \in (a, x)$$

de donde

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \; ; \qquad \xi \in (a, x)$$

□

Tema 4

Integrales

4.1. Integral indefinida

Se llama **primitiva** de una función f a otra función F cuya derivada es f:

$$F(x) \text{ primitiva de } f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también lo es $F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera. Por otra parte, si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la misma función, tienen la misma derivada y, de acuerdo con el teorema del valor medio, difieren en una constante. Llegamos entonces a la siguiente conclusión, una función puede tener infinitas primitivas que son iguales a una cualquiera de ellas más una constante.

El conjunto de todas las primitivas de una función $f(x)$ se llama **integral indefinida** de f y se representa por

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x$$

Si $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$ entonces

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

En otras palabras, $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ es el conjunto de todas las funciones que derivadas dan $f(x)$ o el conjunto de todas las funciones que diferenciada dan $f(x)\ \mathrm{d}x$.

Así definida, la integral tiene las siguientes propiedades:

1. La integral de una suma o diferencia de funciones es la suma o diferencia de las integrales:

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

2. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función:

$$\int K\ f(x)\ \mathrm{d}x = K \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

Es decir, es indiferente poner las constantes multiplicativas dentro o fuera del signo integral.

3. Los signos integral y diferencial seguidos se anulan:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}u &= u + C \\ \mathrm{d}\int u\,\mathrm{d}x &= u\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

4. No existe una regla para integrar el producto de dos funciones. Sin embargo, de la regla de derivación del producto:

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u \quad \Longleftrightarrow \quad u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u$$

se deduce la siguiente regla de integración:

$$\int u\,\mathrm{d}v = \int \mathrm{d}(uv) - \int v\,\mathrm{d}u \quad \Longrightarrow \quad \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

que se llama *regla de integración por partes.*

4.2. Métodos de integración: integrales inmediatas

De las reglas de derivación se deducen las siguientes reglas de integración:

◇ **Funciones potenciales**:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

◇ **Funciones trigonométricas**:

$$\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C; \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsen} x + C; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsen}\frac{x}{k} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{artg} x + C; \qquad \int \frac{1}{k^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\operatorname{artg}\frac{x}{k} + C$$

◇ **Funciones exponenciales**:

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C; \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Todas estas fórmulas son válidas si se sustituye x por $x+b$ donde b es una constante. También son válidas cuando se sustituye x por $ax+b$ con tal de dividir el segundo miembro por a. Por ejemplo

$$\int (3x-5)^4\,\mathrm{d}x = \frac{(3x-5)^5}{5} \cdot \frac{1}{3} + C$$

4.3. Métodos de integración: funciones racionales

Consideremos ahora la integración de funciones del tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas y el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Si el grado del numerador fuese mayor o igual que el del denominador, se hace la división y el problema queda reducido al caso anterior. Por ejemplo:

$$\int \frac{x^3-2x^2+3x+2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x-1+\frac{-x+3}{x^2-x+1}\right)\,\mathrm{d}x$$

Si el denominador es de primer o de segundo grado, pueden darse los siguientes casos:

- **Denominador de primer grado**. En este caso la integral es de tipo logaritmo:

$$\int \frac{5}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln|2x+1|+C$$

- **Denominador de segundo grado con dos raíces**. Descomponiendo en fracciones simples, la integral resulta ser una suma de logaritmos. Por ejemplo sea la integral:

$$\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x+4}{x^2-2x-8} = \frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2} \quad\Longrightarrow\quad A=4,\ B=1$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x = 4\ln|x-4|+\ln|x-2|+C$$

- **Denominador de segundo grado con una raíz doble**. Descomponiendo en fracciones simples, le integral es una suma de una de tipo logaritmo y otra de tipo potencial. Por ejemplo:

$$\int \frac{2x-1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

La descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2} \quad\Longrightarrow\quad A=2,\ B=-3$$

Entonces:

$$\int \frac{2x-1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int\frac{1}{x+2} - 3\int\frac{1}{(x+2)^2} = 2\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+C$$

- **Denominador irreducible**. Vamos a ver que en este caso, la integral es suma de una de tipo logaritmo y otra de tipo arcotangente.

Los casos más sencillos se dan cuando el numerador es la derivada del denominador en cuyo caso la integral es una función logaritmo:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+4x+7)+C$$

o cuando el numerador es constante que da lugar a una función arcotangente:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+2)^2+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\sqrt{3})^2+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{artg}\,\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C$$

En el caso general se obtiene una suma de integrales de ambos tipos. Veamos un ejemplo:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x = c_1 \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x + c_2 \int \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x$$

Las constantes c_1 y c_2 las obtenemos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2c_1 = 3 \\ 4c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = -5$$

Entonces:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - \frac{5}{\sqrt{3}}\ \mathrm{artg}\,\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C$$

4.4. Métodos de integración: integración por partes

Ya hemos visto la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Veamos cómo se aplica con algunos ejemplos. Sea la integral:

$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x$$

Llamemos:

$$u = \ln x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo:

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

A veces es preciso aplicar varias veces la integración por partes. Calculemos la integral:

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integremos por partes con:

$$u = x^2 \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad v = -e^{-x}$$

Así:

$$\int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integramos de nuevo por partes con:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad v = -e^{-x}$$

y obtenemos:

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

También puede ocurrir que después de integrar por partes dos veces volvamos a encontrar la integral original y la podemos calcular despejando. Sea la integral

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$$

Integramos por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^x & \mathrm{d}u &= e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \cos x\,\mathrm{d}x & v &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

con lo que:

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^x & \mathrm{d}u &= e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x & v &= -\cos x \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x\cos x + \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando, resulta:

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,e^x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) + C$$

4.5. Métodos de integración: cambio de variable

Se trata de sustituir en la integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

la variable x por una nueva variable t definida por $x = \varphi(t)$, con lo cual $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Con el cambio de variable la integral queda:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Se calcula esta integral con la variable t y finalmente se deshace el cambio con la sustitución $t = \varphi^{-1}(x)$.

Veamos un ejemplo. Sea la integral:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Hagamos el cambio $\sqrt{x} = t$ o bien $x = t^2$. Diferenciando obtenemos $\mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t$. Sustituyendo:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t} 2t\ \mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{1+t}\ \mathrm{d}t = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t = 2\left(t - \ln(1+t)\right) + C$$

Deshaciendo ahora el cambio, resulta finalmente:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

4.6. Integral definida

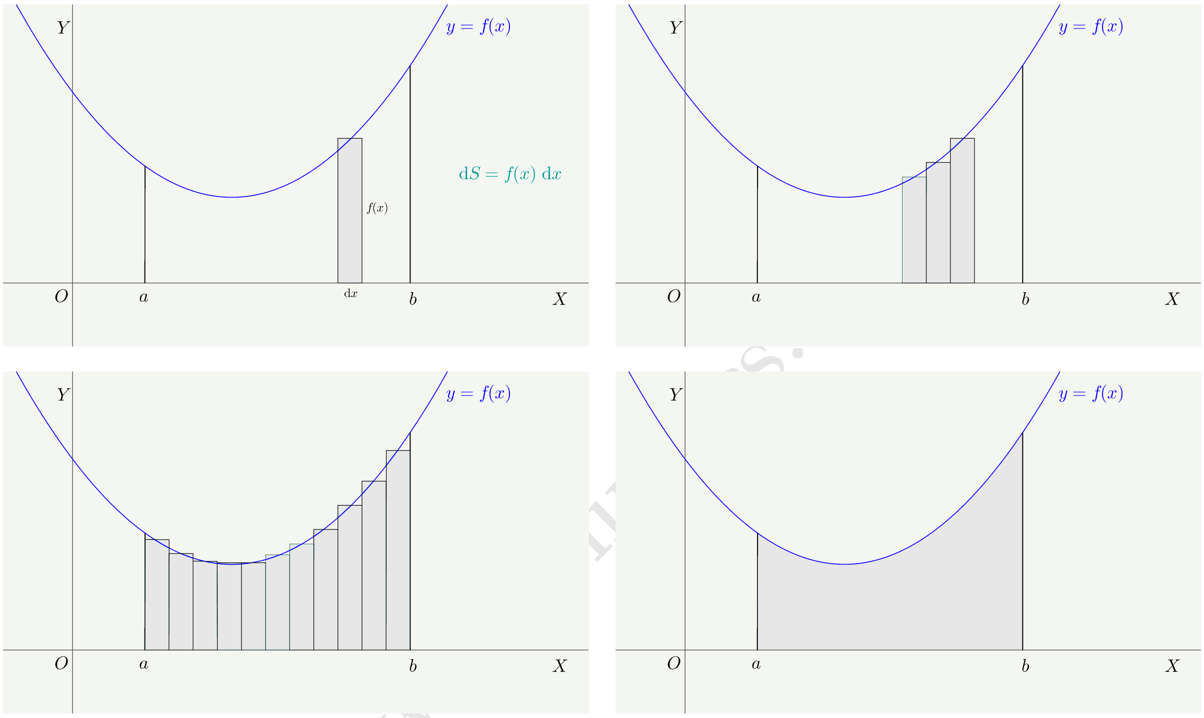


Figura 4.1: Integral definida

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Dividamos este intervalo en subintervalos de longitud $\mathrm{d}x$ (ver figura 4.1). Para cada subintervalo multipliquemos la longitud del subintervalo por el valor de la función en uno de sus puntos (ver figura 4.1):

$$\mathrm{d}S = f(x)\ \mathrm{d}x$$

y sumemos todos estos productos. Esta suma cuando la longitud de los subintervalos tiende a cero se llama **integral definida** de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y se representa por:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Desde el punto de vista geométrico, la integral definida está relacionada con el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

El módulo de la integral definida representa el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ (ver figuras 4.2, 4.3 y 4.4). En el caso $a < b$ la integral es positiva si $f(x)$ toma valores positivos en el intervalo $[a, b]$ y es negativa si $f(x)$ toma valores negativos. En el caso de que f tome valores positivos y negativos la integral es la diferencia entre la porción de área que queda sobre el eje de abscisas y la que queda por debajo.

Así definida, la integral definida tiene las siguientes propiedades:

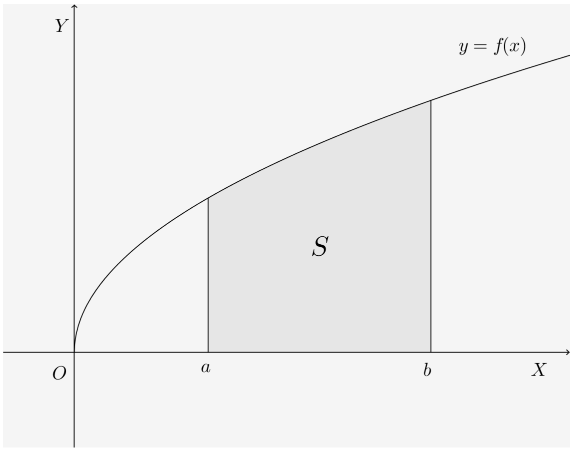


Figura 4.2: Integral definida y área: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S$

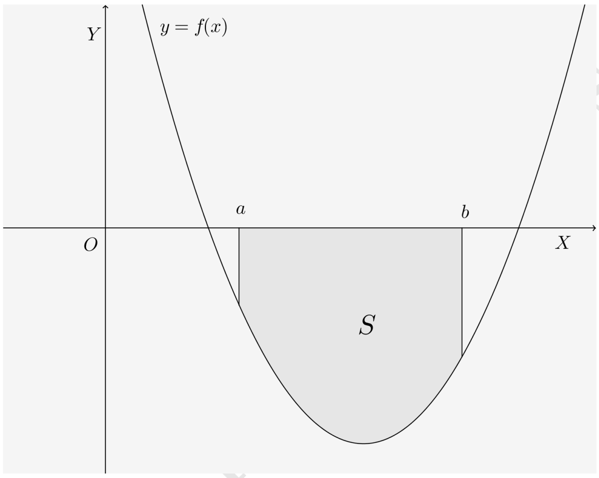


Figura 4.3: Integral definida y área: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -S$

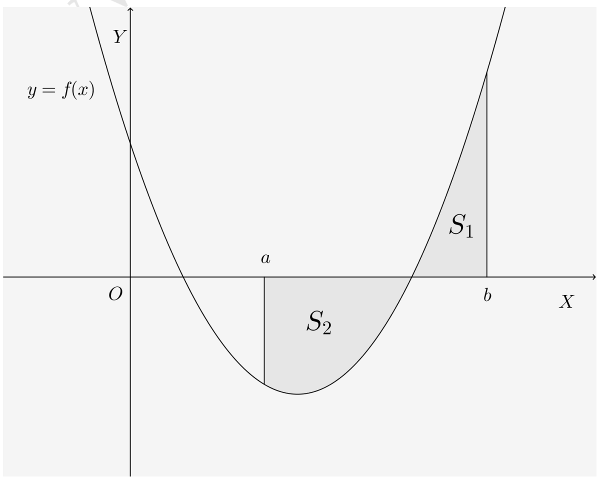


Figura 4.4: Integral definida y área: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_1 - S_2$

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

4.7. Teorema fundamental del calculo integral

Teorema 19 (Teorema del valor medio del cálculo integral)**.** *Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ la integral de f en $[a,b]$ es igual a la longitud del intervalo por el valor de la función en un punto intermedio:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi); \qquad \xi \in (a,b)$$

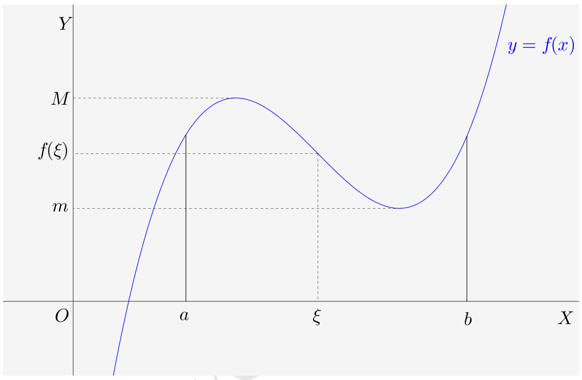


Figura 4.5: Teorema del valor medio

De acuerdo con el teorema de Weierstrass, por ser f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ toma un valor máximo M y un valor mínimo m. Se cumple entonces que:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad\Longrightarrow\quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

por el teorema de Bolzano, f toma todos los valores comprendidos entre M y m. Por tanto, existe un punto ξ que cumple que:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$$

Teorema 20 (Teorema fundamental del cálculo integral)**.** *Sea f una función continua en $[a,b]$. Consideremos la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

dependiente del límite superior de la integral. Con estas condiciones, $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

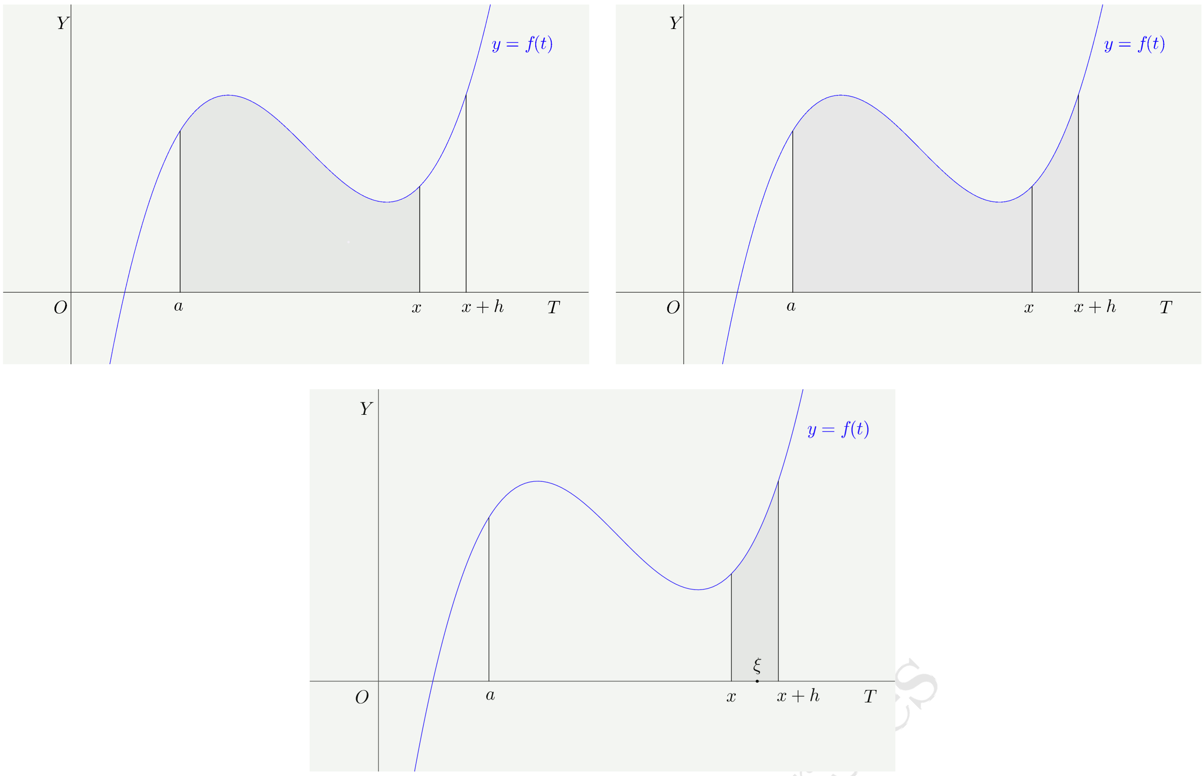


Figura 4.6: Teorema fundamental del cálculo integral

En efecto (ver figura 4.6):

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\, \mathrm{dt} - \int_a^x f(t)\, \mathrm{dt} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, \mathrm{dt} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio del cálculo integral sabemos que existe un ξ comprendido entre x y $x+h$ que cumple que:

$$\int_x^{x+h} f(t)\, \mathrm{dt} = hf(\xi)$$

Cuando h tiende a cero, ξ que está comprendido entre x y $x+h$ tiende a x y, puesto que f es continua $f(\xi)$ tiende a $f(x)$ (ver figura 4.6). Entonces:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, \mathrm{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} hf(\xi) = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

y, por consiguiente, $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Teorema 21 (Regla de Barrow)**.** *Sea f una función continua y F una primitiva cualquiera de f. Entonces:*

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

En efecto, por el teorema fundamental del cálculo integral

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

es una primitiva de $f(x)$. Puesto que $F(x)$ es otra primitiva de la misma función y dos primitivas difieren en una constante:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

Haciendo $x = a$:

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \quad \Longrightarrow \quad C = -F(a) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

y haciendo $x = b$ se obtiene la regla de Barrow.

4.8. Ejemplos

Ejercicio 21. Representar gráficamente la parábola $y = 3x^2 - x + 1$ y calcular el área comprendida entre esa curva, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

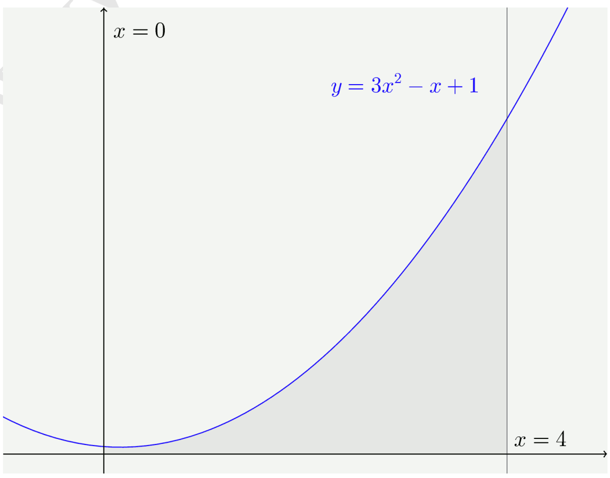
La parábola tiene como vértice el punto:

$$x_0 = \frac{1}{6}; \qquad y_0 = \frac{3}{36} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{11}{12} \quad \Longrightarrow \quad V\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$$

No tiene puntos de corte con el eje X pues el sistema

$$\begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

no tiene solución. La intersección con el eje Y es $(0, 1)$.



Puesto que la curva no corta al eje X, el área puede calcularse mediante la integral:

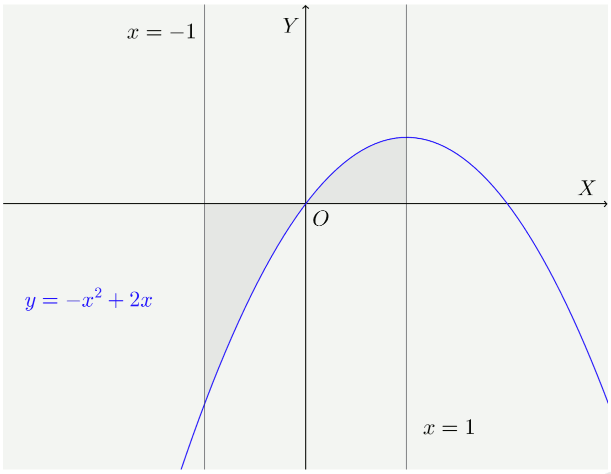
$$S = \int_0^4 (3x^2 - x + 1)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^4 = (64 - 8 + 4) - 0 = 60$$

♠♠♠♠

Ejercicio 22. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 2x - x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Representar gráficamente el recinto.

Solución:

La representación gráfica del recinto es la siguiente:



Puesto que la curva corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $[-1, 1]$, será preciso calcular por separado las dos áreas:

$$\int_{-1}^{0} (2x - x^2)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{1} (2x - x^2)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

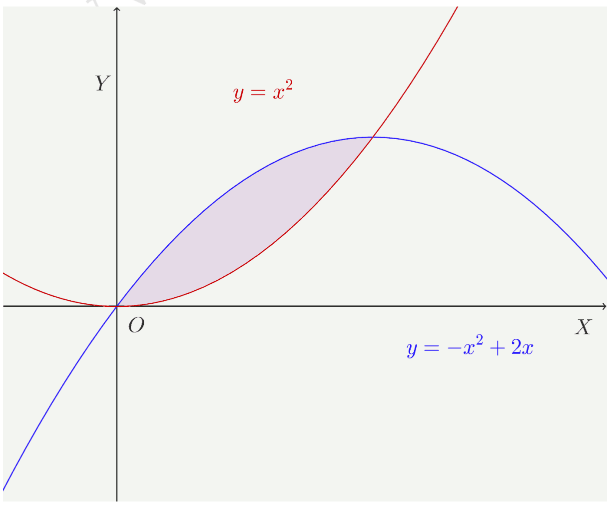
Entonces, la superficie total es:

$$S = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 23. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x$.

Solución:



Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de las curvas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema (para la incógnita x) son $x = 0$ y $x = 1$.

Calculamos la integral de la diferencia de las dos funciones:

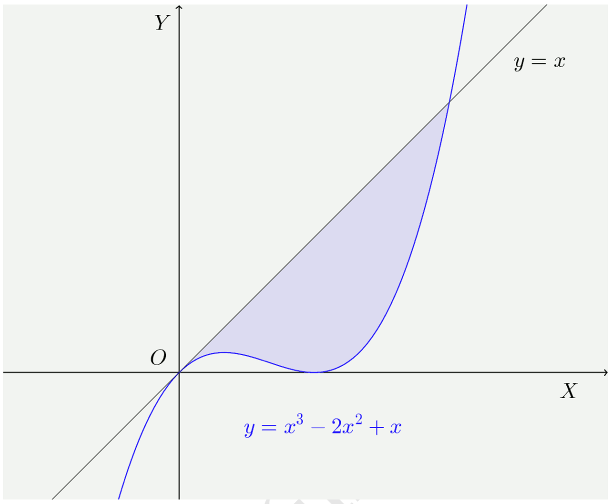
$$\int_0^1 (2x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

y, por consiguiente, la superficie es igual a $\frac{1}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 24. Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.

Solución:



Calculamos la ecuación de la recta tangente. La derivada de la función es

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto de abscisa 0:

$$m = y'(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, es decir, $y = x$.

Ahora debemos calcular el área comprendida entre la curva y su tangente, es decir, entre $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta $y = x$. Como en el ejercicio anterior, calculamos los puntos de intersección:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + x \\ y = x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

Como las dos gráficas se cortan solamente en dos puntos, para calcular el área comprendida entre las dos, basta calcular la integral de la diferencia, o sea,

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x - x)\,dx = \int_0^2 (x^3 - 2x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$$

y la superficie encerrada por la curva y la tangente es igual a $\frac{4}{3}$.

♠♠♠♠

Tema 5

Matrices y determinantes

5.1. Matrices

Una **matriz** de orden $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ números ordenados en m **filas** y n **columnas**. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden 3×5.

Una matriz cualquiera de orden $m \times n$ se escribirá de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matriz se ha señalado mediante dos subíndices, el primero que indica la fila y el segundo que indica la columna correspondiente al elemento. En lo que sigue, nombraremos a las filas de la matriz como F_1, F_2, etc, y a las columnas C_1, C_2, etc.

La **traspuesta** de una matriz A es una matriz A^t que se obtiene cambiando filas por columnas. Así, la primera fila de la matriz A^t es la primera columna de la matriz A, la segunda fila de A^t es la segunda columna de A, etc.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La traspuesta de una matriz de orden $m \times n$ es una matriz de orden $n \times m$.

Algunas matrices, bien por su forma o por la distribución de sus elementos reciben nombres especiales. Veamos algunas de ellas:

- Si una matriz tiene una sola fila se llama **matriz o vector fila**. Si tiene una sola columna, se llama **matriz o vector columna**. Por ejemplo

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  La primera es una matriz fila y la segunda una matriz columna.

La traspuesta de una matriz fila es una matriz columna y viceversa. En el ejemplo anterior, A y B son traspuestas una de la otra.

◇ Una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas se llama **cuadrada**. En este caso, el número de filas y columnas es el orden de la matriz. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

En el caso de matrices cuadradas, los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. forman la **diagonal principal** de la matriz.

Si la matriz A es cuadrada, A^t es una matriz cuadrada del mismo orden.

◇ Si los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal de la matriz son ceros, la matriz se llama **triangular**. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular.

◇ Si los elementos de la matriz se distribuyen simétricamente respecto a la diagonal, esto es, si $a_{ij} = a_{ji}$, la matriz se llama **simétrica**. Si $a_{ij} = -a_{ji}$, la matriz es **antisimétrica**. En este último caso, todos los elementos de la diagonal son ceros. Por ejemplo en:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

B es simétrica y C antisimétrica. Una matriz simétrica coincide con su traspuesta.

5.2. Operaciones con matrices

En el conjunto de las matrices, están definidas las siguientes operaciones:

◇ **Suma.** La suma de matrices del mismo orden se efectúa sumando sus elementos término a término. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dos matrices que no sean del mismo orden no pueden sumarse.

La suma de matrices tiene las mismas propiedades que la suma de números: es asociativa, tiene elemento neutro (cero), cada elemento tiene un opuesto y, finalmente, es conmutativa. La matriz cero es la que tiene todos sus elementos iguales a cero. Podemos decir que el conjunto de matrices $m \times n$ con la operación suma forman un **grupo conmutativo o abeliano**.

◇ **Producto por números.** El producto de una matriz por un número se obtiene multiplicando por ese número todos los elementos de la matriz. Por ejemplo

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Con respecto a la suma y la multiplicación por números, las matrices tienen las mismas propiedades que los vectores, forman un **espacio vectorial**.

◇ **Producto de matrices.** El producto de dos matrices A y B se define para el caso de que el numero de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, el producto AB es una matriz $m \times p$.

El elemento c_{ij} de esta matriz, es decir, el correspondiente a la fila i-ésima y a la columna j-ésima se obtiene multiplicando ordenadamente los elementos de la fila i-ésima de la matriz A por los de la columna j-ésima de la matriz B y sumando estos productos:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Ejercicio 25. Calcular el producto de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B del modo explicado en el párrafo anterior. Así se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
c_{11} = 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 + 2\cdot(-1) = 7 & c_{12} = 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-4) + 2\cdot 5 = 15 \\
c_{13} = 1\cdot 5 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) = -1 & c_{21} = (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) = 4 \\
c_{22} = (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-4) + 3\cdot 5 = 9 & c_{23} = (-2)\cdot 5 + 1\cdot 2 + 3\cdot(-2) = -14 \\
c_{31} = (-1)\cdot(-2) + 3\cdot 3 + 1\cdot(-1) = 10 & c_{32} = (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-4) + 1\cdot 5 = -8 \\
c_{33} = (-1)\cdot 5 + 3\cdot 2 + 1\cdot 8 - 2) = -1 &
\end{array}$$

de modo que:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

El producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa. En el caso de que A y B no sean matrices cuadradas, es posible que exista el producto AB y no exista el producto BA. Por ejemplo, sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

El producto AB no existe porque la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B solamente tiene dos filas. Sin embargo, sí existe el producto BA pues el número de columnas de la matriz B y el número de filas de la matriz A son ambos iguales a 2.

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, ambos productos existen aunque en general, no son iguales, esto es, tampoco en este caso el producto de matrices es conmutativo. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

La **matriz unidad** de orden n es una matriz I tal que para cualquier matriz cuadrada A del mismo orden cumple que:

$$AI = IA = A$$

Esta matriz es:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La **inversa de una matriz cuadrada** A es otra matriz A^{-1} de la misma dimensión que cumple que su producto por A por la izquierda o por la derecha es igual a la matriz unidad I:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La matriz inversa puede servir para despejar la matriz incógnita en una ecuación matricial. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} AX &= B && \text{Multiplicando por la matriz inversa} \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B && \text{Teniendo en cuenta que } A^{-1}A = I \\ IX &= A^{-1}B && \text{Y puesto que } IX = X \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

El producto de metrices cuadradas de orden n cumple la propiedad asociativa y tiene elemento neutro. Sin embargo, no todas las matrices tienen inversa y, como consecuencia, no forman un grupo multiplicativo. Para ver qué condiciones debe cumplir una matriz cuadrada para que exista su inversa, se deben entender previamente los conceptos de dependencia e independencia lineal.

5.3. Rango de una matriz

Una fila de una matriz F_1 es **combinación lineal** de otra fila F_2 si es igual a ésta multiplicada por un número:

$$F_1 \text{ combinación lineal de } F_2 \Longleftrightarrow F_1 = \alpha F_2$$

Por ejemplo en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la segunda fila es combinación lineal de la primera, puesto que es igual a la primera multiplicada por 2 ($F_2 = 2F_1$). También la tercera es combinación lineal de cualquiera de las otras puesto que se puede obtener a partir de ellas multiplicándolas por cero. En general, una fila de ceros es combinación lineal de cualquier otra fila.

De forma similar, F_1 es combinación lineal de F_2 y F_3 si se pueden encontrar dos números α y β de tal forma que se cumpla que $F_1 = \alpha F_2 + \beta F_3$. Estas definiciones se extienden sin dificultad a cualquier número de filas o columnas. Por ejemplo en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras puesto que $F_3 = 2F_2 - F_1$.

En general, la fila F es combinación lineal de las filas F_1, F_2, $\cdots$, F_n si pueden encontrarse números α_1, α_2, $\cdots$, α_n, de tal forma que se cumpla:

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n$$

Las filas (o columnas) de una matriz son **linealmente independientes** si ninguna de ellas es combinación lineal de las restantes. En caso contrario, se dice que son dependientes. Por ejemplo, en las matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

las filas son dependientes porque, según hemos visto, hay filas combinación lineal de otras.

El número de filas independientes en una matriz es el mismo que el de columnas independientes. Este número se llama **rango de la matriz**.

Una matriz se llama **escalonada** si cada fila tiene un cero en la misma posición que la anterior y alguno más. En una matriz escalonada, las filas con elementos distintos de cero son linealmente independientes. Por ejemplo, en

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La fila F_2 no puede ser combinación lineal de la F_3 porque no se puede obtener 2 multiplicando 0 por un número. Las filas F_2 y F_3 son, entonces, linealmente independientes. Además, la fila F_1 no puede ser combinación lineal de las filas F_2 y F_3 porque no puede obtenerse 1 multiplicando por números los ceros de la primera columna. De esta forma, las tres filas son independientes.

Las siguientes transformaciones no cambian el rango de una matriz:

- Cambiar de orden filas o columnas.
- Suprimir las filas o columnas combinación lineal de las restantes.
- Multiplicar filas o columnas por números distintos de cero.
- Sumar a una fila o columna otra multiplicada por un número o, en general, una combinación lineal de las restantes.

Un método para calcular el rango de una matriz consiste en aplicar estas propiedades para transformar la matriz en una escalonada como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 26. Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

La quinta columna es igual a la cuarta multiplicada por -2 de forma que puede suprimirse sin cambiar el rango:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{F_3 \to F_3+F_1}{=} \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La cuarta fila es igual a la tercera multiplicada por -1 de forma que la podemos suprimir. Como $F_3 = 2F_2$ suprimimos también la tercera fila:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

♠♠♠♠

Otro método para calcular el rango se basa en el concepto de determinante que estudiamos en la sección siguiente.

5.4. Determinante de una matriz

El **determinante** de una matriz cuadrada es un número que se calcula a partir de los elementos de la matriz y que tiene la propiedad de que se anula si y solo si las filas de la matriz son linealmente dependientes. El determinante de la matriz A se representa por $|A|$.

En e caso más sencillo de las matrices 2×2 el determinante es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

El cálculo de los determinantes de orden 3 es un poco más complicado:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

fórmula que puede recordarse con ayuda de la **regla de Sarrus**: se escriben bajo el determinante las dos primeras filas, se suman con su signo los productos de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas y se cambia el signo de los productos de los elementos de la otra diagonal y sus paralelas.

Ejercicio 27. Calcular el determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución:

Escribimos

$$\begin{array}{|ccc|l} 1 & 2 & -1 & \\ 3 & -2 & 1 & \\ 2 & -3 & 5 & = 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 3 \\ \multicolumn{1}{c}{\scriptstyle 1} & \scriptstyle 2 & \multicolumn{1}{c}{\scriptstyle -1} & \\ \multicolumn{1}{c}{\scriptstyle 3} & \scriptstyle -2 & \multicolumn{1}{c}{\scriptstyle 1} & \end{array}$$

$$= -10 + 9 + 4 - 4 + 3 - 30$$
$$= -28$$

♠♠♠♠

Para calcular determinantes de orden superior al tercero, necesitamos definir previamente el adjunto de un elemento.

El **menor complementario** de un elemento es el determinante que resulta de suprimir la fila y columna correspondiente al elemento. El **adjunto** es el menor complementario con signo más o menos dependiendo de que la suma de sus subíndices sea par o impar. El adjunto del elemento a_{ij} se representa por A_{ij}. Por ejemplo en

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

Este concepto es importante porque permite obtener un determinante de orden cualquiera calculando determinantes de orden inferior. Ello es posible porque se cumple la propiedad siguiente:

Propiedad. El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los adjuntos correspondientes. Así por ejemplo, puede obtenerse un determinante de orden 4 calculando cuatro determinantes de orden 3 (los adjuntos de una linea cualquiera):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Este modo de calcular un determinante se suele llamar **desarrollar por los elementos de una línea**.

En el ejemplo anterior podría calcularse el determinante desarrollando por ejemplo por la primera columna:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) + 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 0 = -28$$

El mismo resultado se obtiene desarrollando por la segunda fila:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7)7 - 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = -28$$

5.5. Propiedades de los determinantes

1. **Transformaciones de los determinantes**

   ◇ Si se intercambian filas y columnas el determinante no varía. Otra manera de expresar esta propiedad es decir que el determinante de una matriz cuadrada es igual al de su traspuesta.

   ◇ Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante no cambia de valor absoluto pero sí de signo.

   ◇ Si se multiplica una fila por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

   ◇ Si a una fila se le suma otra multiplicada por un número, el determinante no varía. Tampoco cambia si a una fila se le suma una combinación lineal de las restantes.

2. **Factor común**. Otra forma de expresar una de las transformaciones anteriores es la siguiente: puede sacarse factor común de las filas o columnas fuera del determinante.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. **Propiedad distributiva**:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. **Determinantes y dependencia lineal**. En general, un determinante es cero si sus filas (o columnas) son linealmente dependientes y es distinto de cero si sus filas (o columnas) son linealmente independientes. De aquí se deduce que, en particular, un determinante será cero:

   ◇ Si tiene una fila o una columna de ceros.

   ◇ Si tiene dos filas o columnas iguales.

   ◇ Si tiene dos filas o columnas proporcionales.

   ◇ Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes.

El hecho de que un determinante sea cero si sus filas son linealmente dependientes y distinto de cero si son linealmente independientes, proporciona un método de calcular el rango de una matriz mediante determinantes: el rango de una matriz es el orden del determinante más grande que puede formarse con las filas y columnas de la matriz.

Si dos filas son dependientes, todos los determinantes de orden 2 que se pueden formar con ellas deben ser iguales a cero. Si tres filas son dependientes deberán ser iguales a cero todos los determinantes de orden 3 que pueden formarse con ellas. Esta propiedad puede aplicarse también a un número cualquiera de filas.

5. **Adjuntos y determinantes**: la suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra es igual a cero.

   Como se dijo anteriormente, el determinante de una matriz cuadrada puede obtenerse multiplicando los elementos de una línea por los adjuntos correspondientes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

   Si ahora sustituimos los elementos de la primera fila por los de la segunda resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$$

   que es igual a cero porque el determinante tiene dos filas iguales.

   Por ejemplo,si en

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

   se multiplican los elementos de la primera fila por los adjuntos de la segunda resulta (los adjuntos de esta matriz se han calculado en la sección anterior:

$$1 \cdot (-7) + 2 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = 0$$

6. **Determinante del producto de matrices**. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes:

$$|AB| = |A||B|$$

5.6. Matriz inversa

Como se explicó anteriormente, la **inversa de una matriz cuadrada** A es una matriz A^{-1} que cumple que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Sobre la existencia de la matriz inversa se cumple el siguiente teorema:

Teorema 22. *La condición necesaria y suficiente para que exista la inversa de la matriz A es que el determinante de A sea distinto de cero:*

$$|A| \neq 0 \iff \exists A^{-1}$$

En efecto, si existe A^{-1} debe cumplirse que

$$|A||A^{-1}| = |I| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |A| \neq 0$$

Por otra parte, si $|A| \neq 0$ definimos la **matriz adjunta** de A como la matriz que resulta de sustituir cada elemento de esa matriz por su adjunto:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{3} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A puede calcularse obteniendo la matriz adjunta de la traspuesta de A dividida por $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A^t$$

Para comprobarlo basta hacer el producto y aplicar las propiedades que se han visto anteriormente del desarrollo del determinante por los elementos de una línea:

$$A \cdot \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

de forma que

$$\frac{1}{|A|} \text{adj } A^t = I$$

Ejercicio 28. Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se calcula en primer lugar el determinante de la matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 63$$

Puesto que el determinante es distinto de cero existe la inversa de la matriz A. Calculamos adj A y trasponemos:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 9 & 54 & 18 \\ -3 & -39 & -6 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 8 \\ 54 & -39 & -1 \\ 18 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Dividiendo ahora por $|A|$ se obtiene la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 8 \\ 54 & -39 & -1 \\ 18 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Tema 6

Sistemas de ecuaciones

6.1. Definiciones

Un **sistema de m ecuaciones lineales** con n incógnitas es un conjunto de expresiones de la forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

que puede escribirse en **forma matricial** como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

y en forma abreviada como:

$$AX = C$$

Los a_{11}, a_{12}, $\cdots$, son números que se suponen conocidos y forman la matriz A que se llama **matriz de coeficientes**; x_1, x_2, ..., x_n, son las **incógnitas** y los c_1, c_2, ..., son los **términos independientes**. Las matrices X y C se llaman matriz de incógnitas y matriz de términos independientes respectivamente.

Si a la matriz de coeficientes se le añade una columna con los términos independientes, se obtiene una nueva matriz que se llama **matriz ampliada** del sistema:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Ejercicio 29. Escribir el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ -2x & + & 3y & - & z & = & 7 \\ 7x & - & y & + & 3z & = & 5 \end{array}$$

en forma matricial. Escribir la matriz ampliada del sistema.

Solución:

En forma matricial el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 7 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Una **solución** está formada por n números que sustituidos en lugar de las incógnitas hacen que se cumplan las igualdades. Cuando un sistema admite alguna solución se llama **compatible**; en caso contrario, se llama **incompatible**. Si la solución es única el sistema es **compatible determinado**; si admite infinitas soluciones es **compatible indeterminado**.

Si dos sistemas tienen las mismas soluciones se llaman **equivalentes**. Las siguientes transformaciones no cambian las soluciones de un sistema (lo transforman en otro equivalente):

- ◇ Cambiar el orden de las ecuaciones (intercambiar filas en la matriz ampliada)
- ◇ Multiplicar los dos miembros de una ecuación por el mismo número distinto de cero (multiplicar por un número distinto de cero una fila de la matriz ampliada)
- ◇ Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número o, en general, sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes (sumar a una fila de la matriz ampliada otra fila multiplicada por un número)
- ◇ Suprimir cualquier ecuación que sea combinación lineal de las restantes (suprimir las filas de la matriz ampliada que sean combinación lineal de las restantes)

La aplicación sistemática de estas transformaciones para resolver el sistema, transformando la matriz de coeficientes en una de tipo escalonado, se llama **método de Gauss**.

Ejercicio 30. Resolver el sistema del ejercicio 29 por el método de Gauss.

Solución:

Basta aplicar transformaciones a la matriz ampliada hasta transformarla en una matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 7 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{F_2\to F_2+2F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{F_3\to F_3-7F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 6 & -32 & -9 \end{pmatrix} \overset{F_3\to F_3-6F_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & -86 & -75 \end{pmatrix}$$

que conduce a la solución $x = \dfrac{34}{43}, \quad y = \dfrac{271}{86}, \quad z = \dfrac{75}{86}$

♠♠♠♠

6.2. Regla de Cramer

Se llaman **sistemas de Cramer** aquellos que tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

Estos sistemas son siempre compatibles y tienen una sola solución (son determinados). En efecto, si la matriz de coeficientes A tiene un determinante distinto de cero, existe la matriz inversa A^{-1}. Sea el sistema en forma matricial:

$$AX = C$$

multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz A:

$$A^{-1}A = A^{-1}C \Longrightarrow X = A^{-1}C$$

y ésta es la única solución.

Si, por ejemplo, tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Despejando la matriz de incógnitas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Para la primera incógnita x se obtiene:

$$x = \frac{A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3}{|A|}$$

En el numerador tenemos la suma de los productos de los términos independientes por los adjuntos de la primera columna. Podemos escribir esta expresión como un determinante de forma que resulta m s fácil de recordar:

$$x = \frac{A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

De forma similar obtendríamos para y y z:

$$y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

Aunque este resultado lo hemos obtenido para un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, puede extenderse con facilidad a cualquier sistema de Cramer. En conclusión tenemos:

Teorema 23 (Regla de Cramer)**.** *En un sistema de Cramer, una incógnita se puede despejar como el cociente de dos determinantes; el denominador es el determinante de la matriz de coeficientes y el numerador es el determinante de esta misma matriz, sustituyendo los coeficientes de la incógnita que se quiere despejar por los términos independientes.*

Ejercicio 31. Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 2z & = & -3 \\ & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & 3z & = & -11 \end{array}$$

Solución:

se calcula en primer lugar, el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 26$$

Ahora, aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ -11 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-36 + 110 - 88 - 12}{26} = -1$$

$$y = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -11 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-18 + 44}{26} = 1$$

$$z = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & -11 \end{vmatrix} = \frac{88 - 36}{26} = 2$$

♠♠♠♠

6.3. Teorema de Rouché

Teorema 24 (Teorema de Rouché)**.** *La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada:*

$$AX = C \text{ compatible} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rango } A = \text{ rango } A^*$$

Puesto que la matriz ampliada A^* se forma añadiendo a la matriz A una columna con los términos independientes, el hecho de que los rangos sean iguales quiere decir que la columna de términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz A.

Si este rango es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado, si es menor es compatible indeterminado.

Para demostrar este teorema escribamos el sistema

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

en la forma equivalente:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Supongamos que el sistema es compatible. En ese caso existen n números α_1, α_2, $\cdots$, α_n, que sustituidos en lugar de las incógnitas verifican el sistema. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

De esta igualdad se deduce que la columna de términos independientes es combinación lineal de las restantes y que al añadirla a la matriz A no se ha añadido ninguna columna independiente y por tanto rango $A =$ rango A^*.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que las dos matrices A y A^* tienen el mismo rango. Entonces la columna de términos independientes debe ser combinación de las demás de forma que existen n números α_1, α_2, $\cdots$, α_n, que cumplen

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Pero si se cumple esto, $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ es una solución del sistema y éste es compatible.

Como consecuencia del teorema de Rouché, si n es el número de incógnitas, pueden darse los siguientes casos:

- $\diamond$ rango $A =$ rango A^*: sistema compatible:
  - rango $= n$: determinado
  - rango $< n$: indeterminado
- $\diamond$ rango $A =$ rango $A^* - 1$: sistema incompatible.

6.4. Sistemas homogéneos

Los **sistemas homogéneos** son aquéllos en que los términos independientes de todas las ecuaciones son iguales a cero. Un sistema homogéneo tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

que en forma matricial puede escribirse $AX = 0$, donde 0 representa una matriz columna de ceros.

Los sistemas homogéneos son siempre compatibles pues siempre admiten la solución $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ que se llama **solución trivial**. Para que existan soluciones distintas de la trivial debe verificarse que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas. de esta forma el sistema ser indeterminado y tendrá más soluciones.

Las soluciones de un sistema homogéneo cumplen las siguientes propiedades:

- Si X_0 es una solución, también lo es αX_0 siendo α un número cualquiera.
- Si X_1 y X_2 son soluciones, también lo es $X_1 + X_2$.

Un caso particularmente importante se sistema homogéneo es el formado por dos ecuaciones independientes con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \end{aligned}$$

Una solución particular de este sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad y = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \qquad z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

estos números son solución del sistema porque, sustituyendo por ejemplo en la primera ecuación resulta:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

Este último determinante es cero porque tiene dos filas iguales. De la misma forma se comprueba que también se cumple la segunda ecuación.

De las propiedades de los sistemas homogéneos se desprende que la solución general es:

$$x = \lambda\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad y = \lambda\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \qquad z = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

en donde λ es un número cualquiera. Este procedimiento de resolución del sistema se extiende sin dificultad a cualquier sistema homogéneo de n ecuaciones independientes con $n + 1$ incógnitas.

Ejercicio 32. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 0 \\ 6x + 7y - \ \ z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Una solución de este sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -33 \qquad y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 33 \qquad z = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 33$$

La solución general del sistema es el producto de una solución particular no trivial multiplicada por un par metro λ:

$$x = -33\lambda \qquad y = 33\lambda \qquad z = 33\lambda$$

Puesto que al multiplicar soluciones de un sistema homogéneo por números se obtienen nuevas soluciones, podemos dividir la solución general por 33 y obtenemos:

$$x = -\lambda \qquad y = \lambda \qquad z = \lambda$$

que es la solución general escrita de una forma más sencilla.

♠♠♠♠

6.5. Resolución del sistema

Para resolver un sistema cualquiera aplicaremos los resultados que hemos obtenido anteriormente. En general, procederemos de la siguiente forma:

- ◇ Se calculan los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada para ver si el sistema es compatible.
- ◇ Se busca un determinante en la matriz de coeficientes de orden igual al rango y distinto de cero.
- ◇ Se suprimen las ecuaciones que queden fuera del determinante puesto que son dependientes de las otras.
- ◇ Las incógnitas que queden fuera del determinante se pasan al segundo miembro y se las considera como parámetros. El número de parámetros es la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz.
- ◇ Se resuelve el sistema resultante (por ejemplo mediante la regla de Cramer).

Ejercicio 33. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 5z &= 7 \\ -3x + 4y + z &= -4 \\ -7x + 8y - 15z &= 8 \end{aligned}$$

Solución:

En primer lugar veamos si el sistema es compatible. Para ello calculemos en primer ligar el rango de la matriz de coeficientes. Puesto que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -7 & 8 & -15 \end{vmatrix} = -120 + 120 + 21 - 140 - 16 + 135 = 0$$

el rango es menor que 3. Dado que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculemos ahora el rango de la matriz ampliada. Puesto que la tercera columna de la matriz de coeficientes es combinación lineal de las dos primeras (ya que el determinante de esta matriz es cero) se tiene que:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 & -4 \\ -7 & 8 & -15 & 8 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de esta última matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 168 - 84 + 196 + 64 - 72 = 0$$

Entonces el rango de la matriz ampliada es también 2. El sistema es compatible y solamente tiene 2 ecuaciones independientes. El sistema es equivalente a:

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 5z &= 7 \\ -3x + 4y + z &= -4 \end{aligned}$$

Lo resolvemos pasando la incógnita z al segundo miembro

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 + 5z \\ -3x + 4y &= -4 - z \end{aligned}$$

y resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7+5z & -3 \\ -4-z & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{28+20z-12-3z}{8-9} = \frac{16+17z}{-1} = -17z - 16$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7+5z \\ -3 & -4-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8-2z+21+15z}{8-9} = \frac{13+13z}{-1} = -13z - 13$$

Llamando $z = \lambda$, se pueden expresar todas las soluciones como $(-17\lambda - 16, -13\lambda - 13, \lambda)$.

♠♠♠♠

matrices se de

Tema 7

Geometría en el espacio

7.1. Coordenadas de un vector

En el conjunto de los vectores libres del espacio el concepto de dependencia lineal tiene una interpretación geométrica sencilla. Dos vectores son dependientes o uno de ellos es combinación lineal del otro si pueden ser representados sobre la misma recta. Tres vectores son dependientes si pueden ser representados en el mismo plano.

Supongamos tres vectores independientes (es decir, no coplanarios) $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ y $\vec{e_3}$. Vamos a ver que cualquier otro vector $\vec{v}$ puede escribirse como combinación lineal de estos tres vectores.

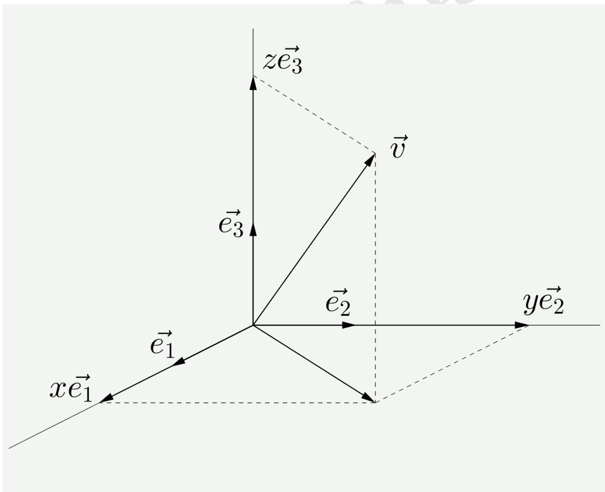


Figura 7.1: Coordenadas de un vector

En efecto de la figura se desprende que:

$$\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$$

y por consiguiente $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ y $\vec{e_3}$. El número máximo de vectores libres independientes es 3 y por eso se dice que el espacio es tridimensional. Un conjunto $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ formado por tres vectores independientes es una base del conjunto de vectores libres del espacio. Los números (x, y, z) que permiten expresar un vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base se llaman coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

Las operaciones de suma de vectores y de producto de vectores por números resultan muy sencillas cuando los vectores se representan por medio de sus coordenadas. Así

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}=u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2}+u_3\vec{e_3}\\ \vec{v}=v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2}+v_3\vec{e_3}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1)\vec{e_1}+(u_2+v_2)\vec{e_2}+(u_3+v_3)\vec{e_3}$$

de forma que la suma de dos vectores tiene como coordenadas la suma de las coordenadas de ambos vectores.

De forma similar si $\vec{u}$ tiene como coordenadas (u_1, u_2, u_3), el vector $\lambda\vec{u}$ tiene coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Ejercicio 34. Dados los vectores $\vec{u}(3, m, 5)$ y $\vec{v}(6, 4, m-3)$ calcular el valor que tiene que tomar m para que los dos vectores tengan la misma dirección.

Solución:

Si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ tienen la misma dirección son linealmente dependientes, es decir, debe cumplirse que

$$\vec{u}=\lambda\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad (u_1,u_2,u_3)=\lambda(v_1,v_2,v_3) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u_1=\lambda v_1\\ u_2=\lambda v_2\\ u_3=\lambda v_3\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$$

en donde la última igualdad es válida únicamente en el caso de que v_1, v_2 y v_3 sean distintos de cero. En caso de que algún denominador sea cero, el numerador también debe serlo. En conclusión, dos vectores tienen la misma dirección si sus coordenadas son proporcionales.

Aplicando este resultado a los vectores del problema resulta:

$$\vec{u}\|\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{6}=\frac{m}{4}=\frac{5}{m-3}$$

La igualdad entre la primera fracción y la segunda produce:

$$\frac{3}{6}=\frac{m}{4} \quad \Longrightarrow \quad 6m=12 \quad \Longrightarrow \quad m=2$$

y la igualdad entre la primera y la tercera:

$$\frac{3}{6}=\frac{5}{m-3} \quad \Longrightarrow \quad 3m-9=30 \quad \Longrightarrow \quad m=13$$

Como deben cumplirse ambas igualdades, el problema no tiene solución.

♠♠♠♠

7.2. Producto escalar. Base ortonormal

El producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los dos vectores.

El producto escalar puede definirse también como el producto del módulo de uno de los vectores por la proyección de otro sobre él (ver figura 7.2:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\;|\vec{v}|\cos\hat{O}=|\vec{u}||\overrightarrow{OA}|$$

Muchas veces se utiliza el producto escalar para calcular el ángulo que forman dos vectores. En este caso, despejando el ángulo en la definición anterior se obtiene:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

El módulo de un vector puede obtenerse a partir del producto escalar del vector por sí mismo:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}||\vec{u}|\cos 0=|\vec{u}|^2 \quad \Longrightarrow \quad |\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

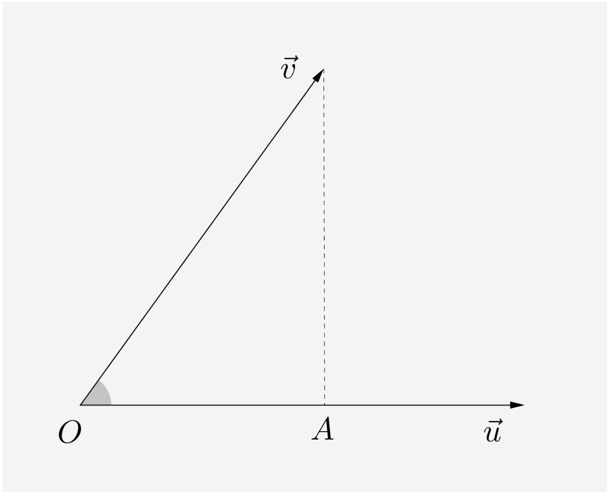


Figura 7.2: Producto escalar de dos vectores

Ejercicio 35. Demostrar que:

- ⋄ El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero.
- ⋄ El producto escalar de dos vectores co la misma dirección es igual a más o menos el producto de sus módulos.

Solución:

Si los vectores son perpendiculares forman un ángulo de 90. Entonces, puesto que $\cos 90 = 0$ el producto escalar de los dos vectores es cero.

Si los vectores tienen la misma dirección forman un ángulo de 0 o 180 según tengan o no el mismo sentido. En el primer caso, $\cos 0 = 1$ y el producto escalar es igual al producto de los módulos. En el segundo caso $\cos 180 = -1$ y el producto escalar es igual al producto de los módulos con signo menos.

♠♠♠♠

El producto escalar así definido tiene las siguientes propiedades:

- ⋄ $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0, \quad \vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{0}$
- ⋄ $u \vec{\cdot} \vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- ⋄ $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}$
- ⋄ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están dados por sus coordenadas $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ el producto escalar se expresa en función de las coordenadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3})\cdot(v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3})\\ &= u_1v_1\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} + u_2v_2\vec{e_2}\cdot\vec{e_2} + u_3v_3\vec{e_3}\cdot\vec{e_3}\\ &\qquad + (u_1v_2 + u_2v_1)\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} + (u_1v_3 + u_3v_1)\vec{e_1}\cdot\vec{e_3} + (u_2v_3 + u_3v_2)\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}\end{aligned}$$

Esta expresión se simplifica si la base es ortonormal. La base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ es ortonormal si está formada por vectores ortogonales (es decir que forman un ángulo de 90) y unitarios (de módulo 1). En este caso se verifica que

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \qquad \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{k} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0$$

de forma que si las coordenadas de los dos vectores en la base ortonormal son $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ el producto escalar es igual a:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$$

El módulo del vector $\vec{u}$ sería

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

y el ángulo de los dos vectores sería:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Ejercicio 36. Calcular todos los vectores perpendiculares a $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ y a $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ donde las coordenadas están dadas en una base ortonormal.

Solución:

Sea el vector $\vec{w}(x, y, z)$ perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Este vector cumple:

$$\vec{w}\perp\vec{u} \wedge \vec{w}\perp\vec{v} \quad\Longrightarrow\quad \vec{w}\cdot\vec{u} = 0 \wedge \vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} u_x x + u_y y + u_z z = 0 \\ v_x x + v_y y + v_z z = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo que, como se sabe por el tema anterior tiene una solución particular

$$x_0 = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \quad y_0 = \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix}, \quad z_0 = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

y la solución general es $\vec{w}(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$.

En el apartado siguiente veremos que la solución particular obtenida se llama producto vectorial de los dos vectores.

♠♠♠♠

7.3. Producto vectorial

Dados dos vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ en la base ortonormal $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ el producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ es el vector:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

Ejercicio 37. Calcular el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

El producto vectorial es:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 3 \\ \vec{\jmath} & -2 & 0 \\ \vec{k} & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

♠♠♠♠

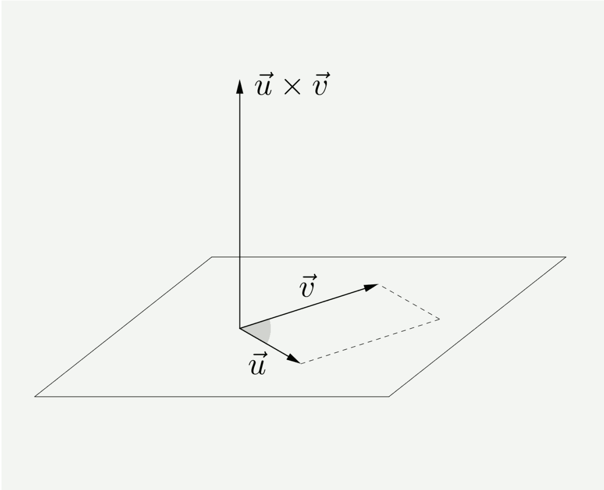


Figura 7.3: Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

- $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \times \vec{v}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}||\operatorname{sen} \alpha|$

Basándonos en la primera propiedad, utilizaremos el producto vectorial cada vez que queramos calcular un vector que sea ortogonal a dos vectores dados.

El producto vectorial tiene también una interesante propiedad geométrica: el módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo que tiene como lados los dos vectores. Esto es así porque la base del paralelogramo es el módulo de uno de los vectores y la altura es el módulo del otro por el seno del ángulo que forman ambos.

7.4. Producto mixto

El producto mixto de tres vectores se representa mediante $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ y es el producto escalar del primero por el producto vectorial del segundo y el tercero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Si las coordenadas de los tres vectores en una base ortonormal son:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

puede calcularse el producto mixto mediante el siguiente determinante:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = u_x \begin{vmatrix} v_y & w_y \\ v_z & w_z \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} v_z & w_z \\ v_x & w_x \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

De su expresión como determinante se deducen estas propiedades del producto mixto:

- ⋄ El producto mixto cambia de signo cuando se intercambian dos vectores pero no cambia en una permutación circular de los tres vectores.
- ⋄ El producto mixto es cero cuando los tres vectores son linealmente dependientes o lo que es lo mismo, cuando los tres vectores son coplanarios.

Geométricamente, el módulo del producto mixto es el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas concurrentes los tres vectores o seis veces el volumen del tetraedro que tiene como vértices el origen común de los tres vectores y sus tres extremos.

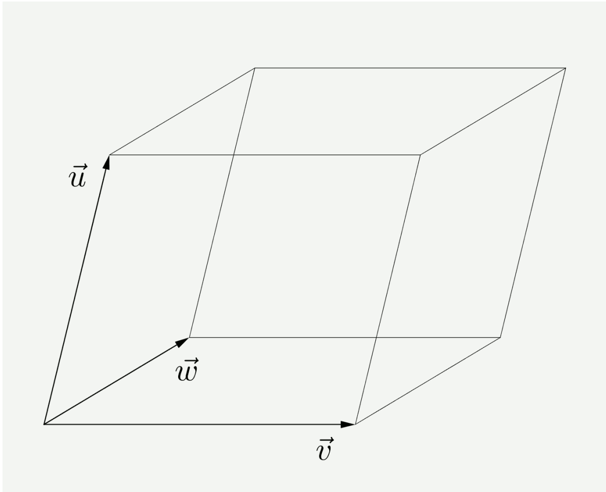


Figura 7.4: Producto mixto de tres vectores

7.5. Sistema de referencia en el espacio

Un sistema de referencia en el espacio está formado por un punto O llamado **origen de coordenadas** y una **base del espacio vectorial** $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. Las rectas que pasan por el origen y tienen la dirección de los vectores de la base se llaman **ejes de coordenadas**.

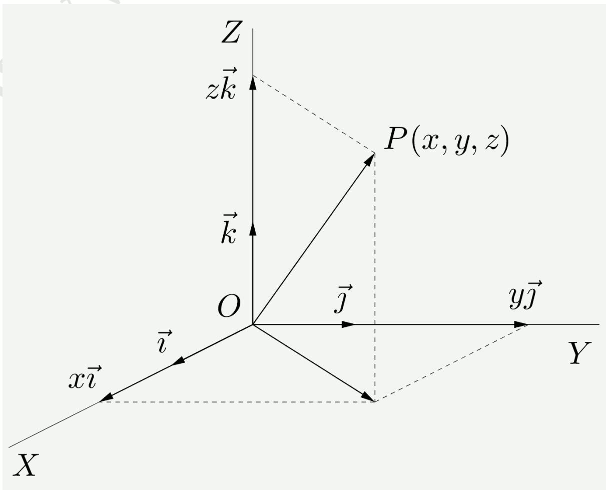


Figura 7.5: Sistema de referencia en el espacio

A cada punto P se le asocia un vector llamado **vector de posición** del punto P y es el vector $\overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto. Por definición, las coordenadas del punto P son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$.

Llamaremos vector $\overrightarrow{AB}$ al vector que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B. Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ pueden calcularse fácilmente cuando se conocen las coordenadas de los puntos A y B. En efecto, de la figura 7.6 se deduce que:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} \quad\Longrightarrow\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

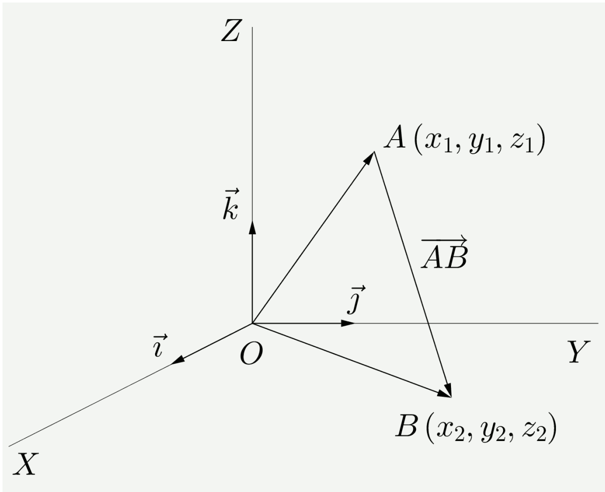


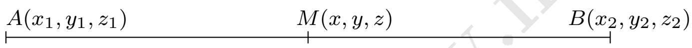
Figura 7.6: Vector definido por dos puntos

y, puesto que las coordenadas de $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OA}$ son iguales que las coordenadas de los puntos B y A, resulta que las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ pueden obtenerse restando las coordenadas del extremo B menos las coordenadas del origen del vector A.

Ejercicio 38. Dados los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ calcular las coordenadas del punto medio del segmento AB.

Solución:

Sea $M(x, y, z)$ el punto medio del segmento.



Dado que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$ resulta:

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} x_2-x_1\\ y_2-y_1\\ z_2-z_1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x-x_1\\ y-y_1\\ z-z_1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases} x_2-x_1=2(x-x_1)\\ y_2-y_1=2(y-y_1)\\ z_2-z_1=2(z-z_1)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases} x_2+x_1=2x\\ y_2+y_1=2y\\ z_2+z_1=2z\end{cases}$$

y de aquí se obtiene:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

♠♠♠♠

7.6. Ecuación del plano

Así como a los puntos se les asocian sus coordenadas en un determinado sistema de referencia, a los planos y las rectas se les pueden hacer corresponder ecuaciones o sistemas de ecuaciones. Estas ecuaciones o sistemas son la condición que tienen que cumplir las coordenadas de un punto para estar contenido en un plano o una recta.

Ejercicio 39. Sabiendo que la ecuación $x - 5y - 3z + 1 = 0$ representa un plano y el sistema

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 5x - 4y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

representa una recta:

(*a*) Determinar si el punto $P(3, 2, -4)$ está contenido en el plano o en la recta.
(*b*) Calcular el punto de intersección (si existe) de la recta y el plano.

Solución:

El punto P no está contenido en el plano porque sus coordenadas no cumplen la ecuación del plano:

$$3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) = 3 - 10 + 12 = 1 \neq 0$$

Sin embargo, sí que está contenido en la recta puesto que:

$$3 + 2 + (-4) - 1 = 0$$
$$5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 1 = 15 - 8 - 8 + 1 = 0$$

El punto de intersección de la recta y el plano debe cumplir tanto la ecuación como el sistema puesto que está contenido en el plano y en la recta. Por consiguiente debe verificar las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 5y - 3z + 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ 5x - 4y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $(1, 1, -1)$. Estas son las coordenadas del punto de intersección. Si el sistema hubiese resultado incompatible, querría decir que no habría puntos de intersección, esto es, que la recta sería paralela al plano.

♠♠♠♠

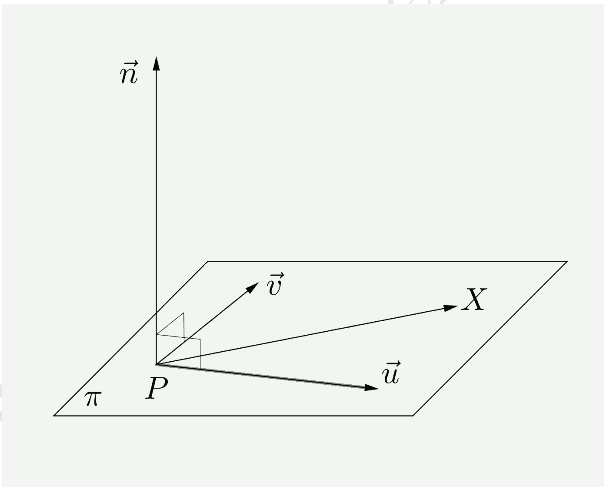


Figura 7.7: Ecuación del plano

Un plano puede quedar definido mediante un punto P y un vector $\vec{n}$ perpendicular al plano (**vector normal**) o mediante un punto P y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ paralelos al plano (**vectores directores**). Obsérvese que existen infinitos planos que contienen a un punto y son paralelos a un vector por lo que son precisos dos vectores directores para determinar un plano.

A partir de los vectores directores puede obtenerse un vector normal multiplicándolos vectorialmente.

Ecuaciones vectorial y paramétricas.

Si el punto X pertenece al plano determinado por el punto P y los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, los tres vectores $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, es decir:

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

Esta es la ecuación vectorial del plano. Si la expresamos en función de las coordenadas queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Ecuación vectorial que equivale al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + su_x + tv_x \\ y = y_0 + su_y + tv_y \\ z = z_0 + su_z + tv_z \end{cases}$$

que se llaman ecuaciones paramétricas del plano.

Ecuación en forma de determinante.

La dependencia lineal de los vectores $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede expresarse también igualando cero el producto mixto:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_x & v_x \\ y - y_0 & u_y & v_y \\ z - z_0 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$$

que se llama ecuación del plano en forma de determinante. Aquí, las coordenadas de los tres vectores son las columnas del determinante.

Ecuación del plano en forma normal

Desarrollando el determinante anterior por los elementos de la primera columna resulta:

$$\begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

Los determinantes de segundo orden que aparecen en esta ecuación, son las coordenadas del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ y, por consiguiente, las coordenadas de un vector perpendicular al plano. Llamemos $\vec{n}$ a este vector y A, B y C a sus coordenadas.

La ecuación del plano en forma normal se escribe:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ecuación en forma general o implícita.

Quitando los paréntesis en la ecuación normal, resulta una ecuación del tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

que se llama ecuación general o implícita del plano. Los coeficientes A, B y C son las coordenadas de un vector perpendicular al plano. Veremos más adelante que el coeficiente D está relacionado con la distancia del plano al origen de coordenadas.

Ejercicio 40. Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, -1)$ y $C(2, -1, 0)$.

Solución:

Basta considerar el plano determinado por el punto A y los vectores directores:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La ecuación en forma de determinante es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por la primera columna:

$$-5(x-1) - 4(y-1) + 3(z-1) = 0$$

que es la ecuación normal del plano. Quitando paréntesis obtenemos la ecuación general:

$$-5x - 4y + 3z + 6 = 0$$

♠♠♠♠

7.7. Ecuaciones de la recta

Una recta queda determinada mediante un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un vector director $\vec{v}$ que da la dirección de la recta. La dirección también puede estar dada por dos vectores $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ perpendiculares a la recta (figura 7.8).

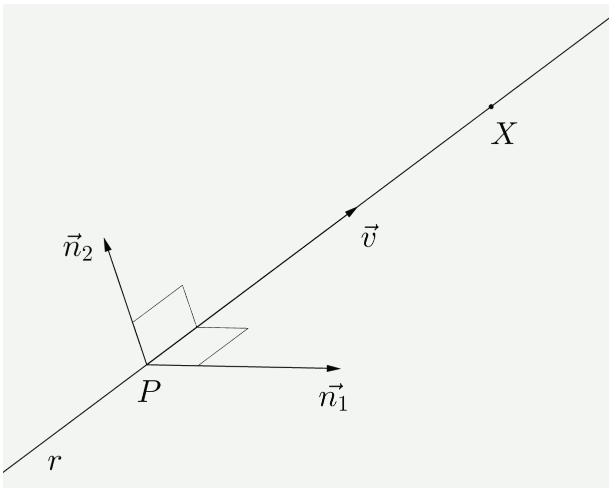


Figura 7.8: Ecuación de la recta

Ecuaciones vectorial y paramétricas.

La condición para que un punto cualquiera $X(x, y, z)$ pertenezca a la recta es que los vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección o, lo que es lo mismo, que sean linealmente dependientes:

$$X \in r \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{PX} \parallel \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{PX} = t\vec{v}$$

y puesto que $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$ esta última igualdad se puede escribir:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

que es la ecuación vectorial de la recta. Si la escribimos en función de las coordenadas obtenemos las ecuaciones paramétricas: Esta ecuación entre vectores puede escribirse en función de las coordenadas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{cases}$$

Ecuación en forma continua

Las ecuaciones paramétricas de la recta son un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas x, y, z y t. Puede eliminarse ésta última y obtener un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Despejando t en las 3 igualdades:

$$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}$$

Esta es la ecuación de la recta en forma continua. En principio, no podría escribirse la ecuación continua cuando alguna de las coordenadas del vector director fuese cero pero, a veces, se escribe cero en el denominador sobreentendiéndose que en ese caso también el numerador es cero.

Ecuación como intersección de planos

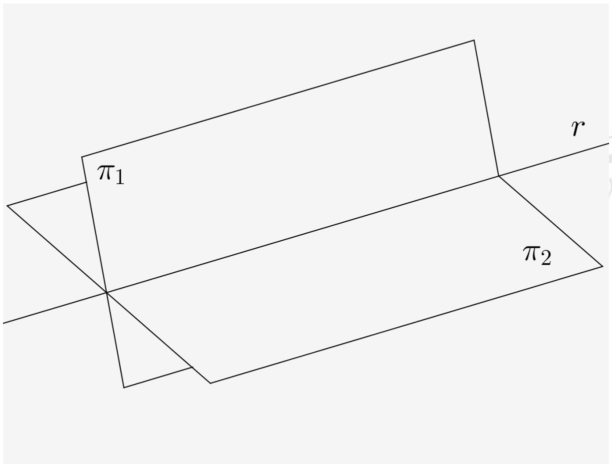


Figura 7.9: Recta como intersección de dos planos

En general, las soluciones de un sistema de 2 ecuaciones lineales independientes con 3 incógnitas forman una línea recta. Es decir, la ecuación de la recta se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones representa un plano y por ello este sistema se conoce también como ecuación de la recta como intersección de planos. El vector

$$\vec{n_1}=\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

perpendicular al plano π_1 es perpendicular a todas las rectas contenidas en π_1 y, por tanto, perpendicular a r. Lo mismo puede decirse del vector $\vec{n_2}$. La recta está definida en este caso mediante dos vectores perpendiculares $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$. El producto vectorial de estos vectores, tiene la dirección de la recta y es, por consiguiente, un vector director.

Ejercicio 41. Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r:\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos el vector director:

$$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\-4\end{pmatrix}$$

Para no escribir los signos menos tomaremos como vector director el opuesto a este. Necesitamos ahora un punto de la recta. Para $x=0$ la ecuación queda:

$$\begin{cases}y-2z=3\\ -y+z=0\end{cases}$$

y resolviendo obtenemos el punto $P(0,3,-3)$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases}x=t\\ y=3+7t\\ z=-3+4t\end{cases}$$

♠♠♠♠

7.8. Haz de planos que contiene a una recta

Consideremos ahora una recta dada como intersección de los planos:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}\right.$$

Los vectores $\vec{n_1}(A_1,B_1,C_1)$ y $\vec{n_2}(A_2,B_2,C_2)$ son vectores independientes perpendiculares a la recta. Cualquier plano que contenga a la recta r deberá tener un vector normal combinación lineal de $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$. Además, todos los puntos de la recta r deberán satisfacer la ecuación del plano. En conclusión, cualquier plano que contenga a la recta deberá tener una ecuación de la forma:

$$s(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+t(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

que se llama ecuación del haz de planos de la recta r que, como se ve, tiene dos parámetros s y t. Dividiendo por s y llamando $\frac{t}{s}=\lambda$ se obtiene una ecuación del haz con un solo parámetro:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

El inconveniente de esta forma de la ecuación del haz es que al dividir por s hemos eliminado del haz al plano correspondiente al valor $s=0$. El haz está formado por todos los planos de la forma $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ y además el plano $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Ejercicio 42. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta

$$\left\{\begin{array}{l}3x-5y+2z-3=0\\ x+y-3z-1=0\end{array}\right.$$

y pasa por el punto: (a) $P(2,3,-1)$ (b) $P(3,1,1)$ (c) $P(14,11,8)$.

Solución:

Puesto que contiene a la recta, el plano buscado pertenece al haz:

$$s(3x-5y+2z-3)+t(x+y-3z-1)=0$$

(a) Si el plano debe contener al punto $P(2,3,-1)$, se cumple que:

$$s(3\cdot 2-5\cdot 3+2\cdot(-1)-3)+t(2+3-3\cdot(-1)-1)=0$$
$$-14s+7t=0$$
$$-2s+t=0$$

Una solución de esta ecuación es $s=1$, $t=2$. El plano buscado es:

$$3x-5y+2z-3+2(x+y-3z-1)=0$$

y haciendo operaciones resulta

$$5x-3y-4z-5=0$$

(*b*) Si el plano debe contener al punto $P(3,1,1)$:

$$\begin{aligned}&s(3\cdot 3-5\cdot 1+2\cdot 1-3)+t(3+1-3\cdot 1-1)=0\\&3s+0t=0\end{aligned}$$

y, por tanto, $s=0$. Por consiguiente el plano que buscamos es:

$$x+y-3z-1=0$$

(*c*) En este caso, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación del haz resulta:

$$\begin{aligned}&s(3\cdot 14-5\cdot 11+2\cdot 8-3)+t(14+11-3\cdot 8-1)=0\\&0s+0t=0\end{aligned}$$

Todos los valores de s y t son solución. Esto significa que todos los planos que contienen a la recta r contienen también al punto P, es decir, el punto P está contenido en r y la solución del problema es todo el haz de planos.

♠♠♠♠

7.9. Posiciones relativas de rectas y planos

Posiciones relativas de dos planos

Dos planos pueden ser paralelos o cortarse en una línea recta.

Sean los planos:

$$\begin{aligned}&\pi_1 : A_1x+B_1y+C_2z+D_2=0\\&\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}$$

Si los planos son paralelos, sus vectores normales tienen la misma dirección. En este caso:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \quad\Longrightarrow\quad \vec{n_1}\parallel\vec{n_2}\quad\Longrightarrow\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

Si además se cumple:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

los planos son coincidentes puesto que las dos ecuaciones son equivalentes.

Posiciones relativas de tres planos

Sean los planos:

$$\begin{aligned}&\pi_1 : A_1x+B_1y+C_2z+D_2=0\\&\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\&\pi_3 : A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{aligned}$$

y sean M y $M*$ las matrices de coeficientes y ampliada del sistema formado por estas tres ecuaciones. Pueden darse los siguientes casos:

◇ rango $M=$ rango $M^*=3$.

  En este caso, el sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.

◇ rango $M=2$, rango $M^*=3$.

  El sistema es incompatible y los tres planos no tienen ningún punto común. Pueden darse dos casos:

  - Hay dos planos paralelos y otro que los corta.

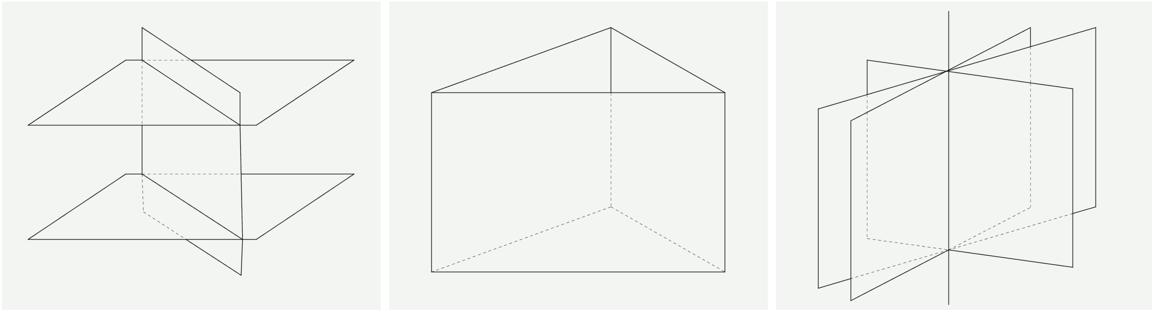


Figura 7.10: Posiciones relativas: rango $M = 2$

- Los tres planos se cortan dos a dos en rectas paralelas.

◇ rango $M = 2 =$ rango $M^* = 2$.

El sistema es compatible indeterminado uniparamétrico. Los tres planos se cortan en una línea recta.

◇ rango $M = 1$, rango $M^* = 2$.

Sistema incompatible y los tres planos tienen la misma dirección. Los planos son paralelos y puede haber dos de ellos coincidentes.

◇ rango $M = 1$, rango $M^* = 1$.

Los tres planos son coincidentes.

Posiciones relativas de un plano y una recta

Sea la recta dada en forma implícita:

$$r : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

y el plano:

$$\pi : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Sean M y M^* las matrices del sistema formado por las tres ecuaciones. Pueden darse los siguientes casos:

◇ rango $M =$ rango $M^* = 3$.

El sistema es compatible determinado. El plano y la recta se cortan en un punto.

◇ rango $M = 2$, rango $M^* = 3$.

El sistema es incompatible. El plano y la recta son paralelos.

◇ rango $M =$ rango $M^* = 2$.

El sistema es compatible indeterminado uniparamétrico. La recta está contenida en el plano.

Supongamos ahora que la recta está dada por el punto P y el vector $\vec{v}$ y el plano por el punto Q y el vector normal $\vec{n}$:

◇ Si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, la recta y el plano se cortan en un punto.

◇ Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, pueden darse dos casos:

- Si $P \notin \pi$: la recta y el plano son paralelos.
- Si $P \in \pi$: la recta está contenida en el plano.

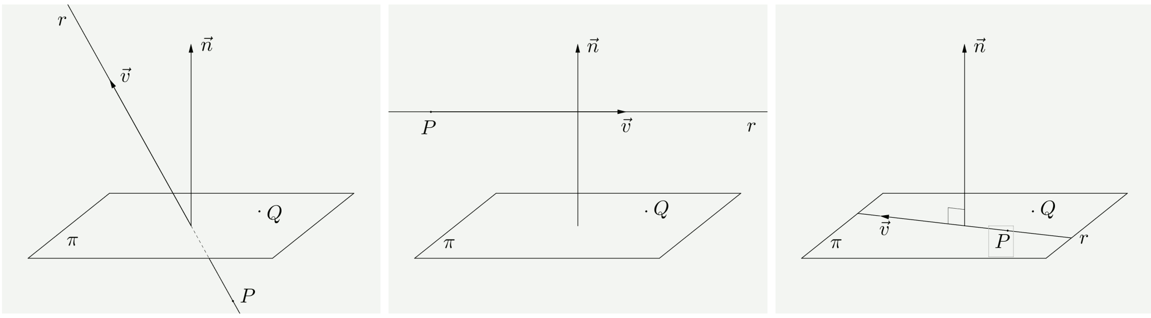


Figura 7.11: Posición relativa de recta y plano

Posiciones relativas de dos rectas

Sea la recta r_1 definida por el punto P y el vector $\vec{u}$ y la recta r_2 dada por el punto Q y el vector $\vec{v}$:

- Si rango $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 3$ las rectas no son coplanarias: se cruzan.
- Si rango $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2$ las rectas son coplanarias. Pueden darse dos casos:
  - rango $(\vec{u}, \vec{v}) = 2$. Las dos rectas no tienen la misma dirección: se cortan.
  - rango $(\vec{u}, \vec{v}) = 1$. Las dos rectas tienen la misma dirección: son paralelas.
- Si rango $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 1$ los tres vectores tienen la misma dirección: las rectas son coincidentes.

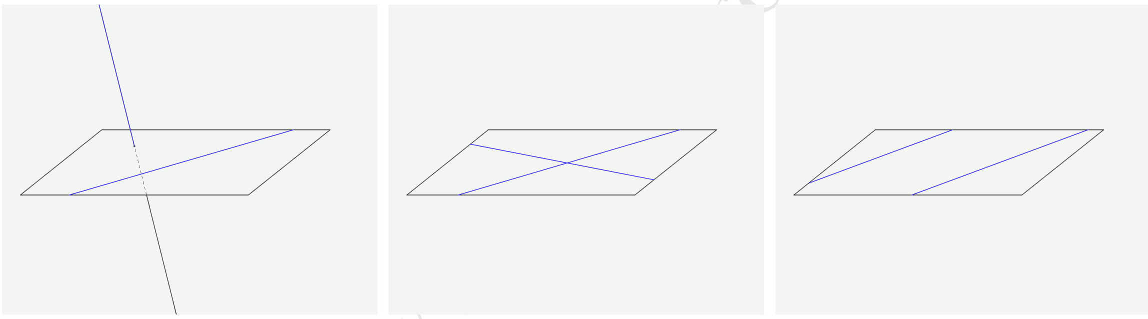


Figura 7.12: Posición relativa de dos rectas

7.10. Ángulos

El ángulo de dos rectas es el ángulo que forman sus vectores directores o su suplementario si es menor. Si las rectas tienen vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el ángulo de las dos rectas es:

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right|$$

Si las rectas son perpendiculares forman un ángulo de 90° y el producto escalar de sus vectores directores es cero. Si las rectas son paralelas forman un ángulo de 0°, sus vectores directores tienen la misma dirección y en consecuencia sus coordenadas son proporcionales.

De forma similar, el ángulo que forman dos planos es igual o suplementario al que forman sus vectores normales $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$:

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right|$$

Si los planos de ecuaciones $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ son perpendiculares, el producto escalar de sus vectores normales debe ser cero y en consecuencia:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \quad \Longrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Si los planos son paralelos, sus vectores normales tienen la misma dirección y, en consecuencia, son linealmente dependientes de forma que:

$$\pi_1 \| \pi_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

El ángulo que forman una recta y un plano es el ángulo que forma la recta con su proyección sobre el plano. Este ángulo es complementario del que forman el vector director de la recta y el vector perpendicular al plano (ver figura 7.13). Así, si $\vec{v}$ es el vector director de la recta y $\vec{n}$ el vector director del plano se cumple que:

$$\cos(90 - \alpha) = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|} \right| \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} \alpha = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|} \right|$$

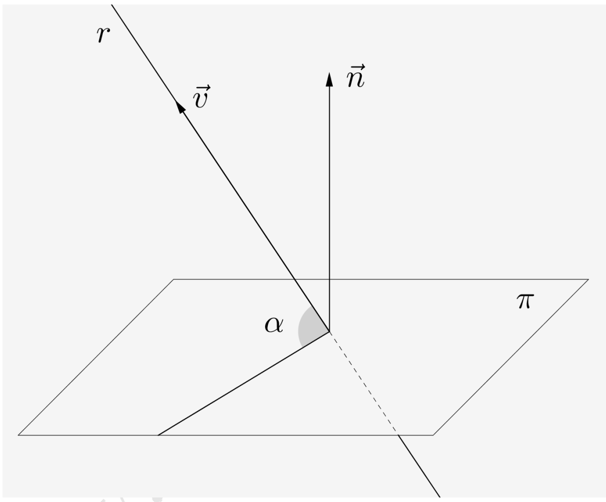


Figura 7.13: Angulo de recta y plano

7.11. Distancias

Distancia entre dos puntos.

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia de un punto a una recta

Calculemos ahora la distancia entre un punto y una recta. Sea el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y la recta r definida por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y el vector director $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$.

En la figura se ha representado el vector director $\vec{v}$ sobre la recta r con origen en el punto A y extremo en el punto Q. La distancia del punto P a la recta r es la longitud d del segmento perpendicular a r por P.

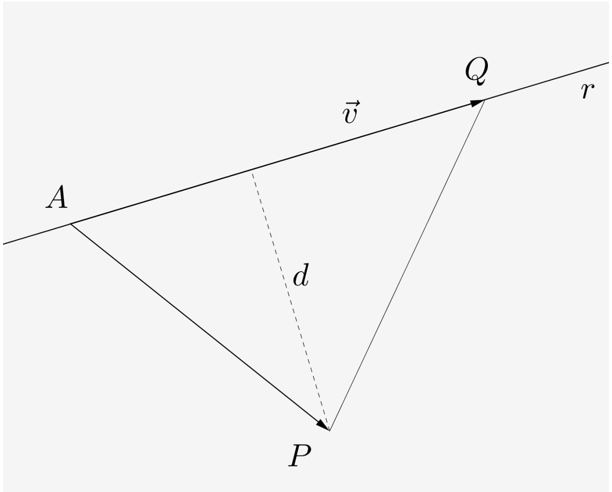


Figura 7.14: Distancia de un punto a una recta

El área del triángulo APQ es como sabemos la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AP} \times \vec{v}$. Por otra parte este área es también igual a la mitad de su base que es el módulo de v por su altura d. Igualando ambas expresiones resulta:

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right| = \frac{1}{2} \mid \vec{v} \mid d$$

y despejando d obtenemos:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right|}{\mid \vec{v} \mid}$$

Distancia de un punto a un plano

Sea el plano $\pi: \; Ax + By + Cz + D = 0$. La ecuación de la perpendicular a π por el origen es:

$$\begin{cases} x = At \\ y = Bt \\ z = Ct \end{cases}$$

La intersección de esta recta con el plano π es el punto $P(x', y', z')$. Las coordenadas de este punto se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x = At \\ y = Bt \\ z = Ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A^2t + B^2t + C^2t + D = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{-D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Las coordenadas del punto de intersección son:

$$P\left(\frac{-AD}{A^2+B^2+C^2}, \frac{-BD}{A^2+B^2+C^2}, \frac{-CD}{A^2+B^2+C^2}\right)$$

La distancia del origen a P es:

$$d = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\frac{A^2D^2 + B^2D^2 + C^2D^2}{(A^2+B^2)^2}} = \sqrt{\frac{D^2}{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Sea ahora el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y el plano $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$. Para calcular la distancia de P a π hacemos una traslación que lleve el punto P al origen:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

El plano trasladado tiene como ecuación:

$$A(x' + x_0) + B(y' + y_0) + C(z' + z_0) + D = 0 \qquad \text{o} \qquad Ax' + By' + Cz' + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Aplicando ahora la fórmula obtenida para la distancia desde el origen a un plano se obtiene:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

fórmula que es fácil de recordar pues el numerador es el primer miembro de la ecuación general del plano π sustituyendo, en lugar de las incógnitas, las coordenadas de P.

La distancia entre dos planos paralelos puede calcularse tomando un punto cualquiera de uno de ellos y calculando la distancia desde ese punto al otro plano. También puede obtenerse como suma o diferencia de las distancias desde el origen.

Si las ecuaciones de los planos son $\pi_1: \ Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi_2: \ Ax + By + Cz + D' = 0$, su distancia es:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre rectas que se cruzan

Calcularemos ahora la distancia entre dos rectas que se cruzan. Sea la recta r_1 determinada por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y el vector $\vec{u}$ y la recta r_2 definida por el punto $Q(x_2, y_2, z_2)$ y el vector $\vec{v}$.

Una forma de calcular la distancia entre las dos rectas es la siguiente (ver figura 7.15):

- ⋄ Calcularemos el plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2.
- ⋄ Calcularemos la distancia de un punto cualquiera de r_2 (por ejemplo el punto Q) al plano π.

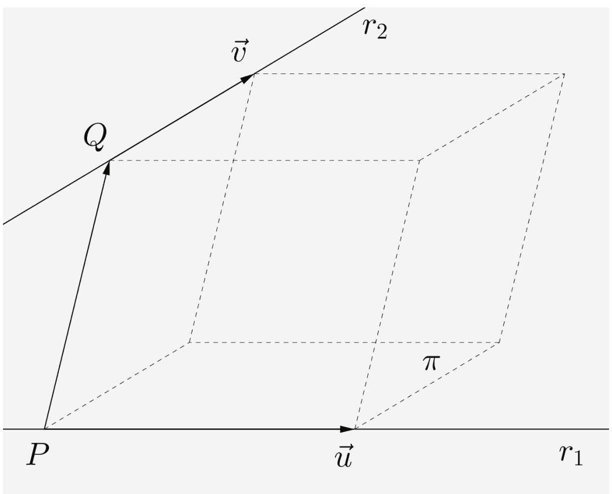


Figura 7.15: Distancia entre dos rectas que se cruzan

También podemos obtener una fórmula para la distancia entre las dos rectas a partir del paralelepípedo que tiene como aristas los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$. El volumen de este paralelepípedo es, como sabemos, el producto mixto:

$$V = \left| \left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ} \right] \right|$$

Por otra parte, el mismo volumen puede calcularse como el producto de la base $|\vec{u} \times \vec{v}|$ por la altura que es igual a la distancia entre las dos rectas (ver figura 7.15):

$$V = d\, |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Igualando ambas expresiones resulta:

$$d = \frac{\left| \left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ} \right] \right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

7.12. Dos problemas

Recta por un punto que corta a dos rectas que se cruzan

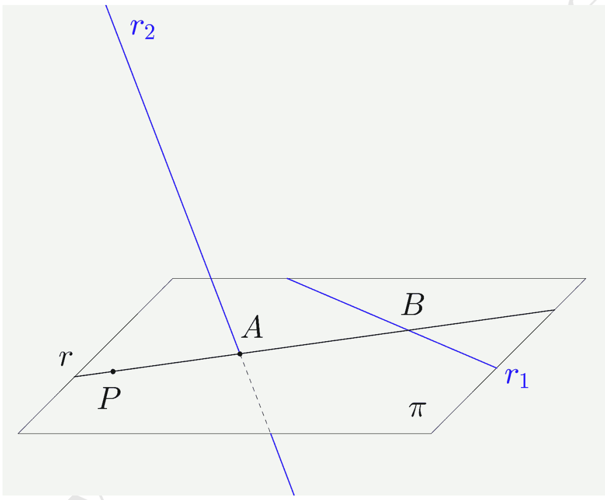


Figura 7.16: Recta que pasa por un punto y corta a otras dos (I)

El procedimiento para obtener la ecuación de una recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas r_1 y r_2 sería (figura 7.16):

(I) Calcular la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r_1 (π).

(II) Punto de intersección A de este plano con la recta r_2.

(III) Ecuación de la recta que pasa por P y A.

El problema no tiene solución si la recta AP es paralela a r_1 o si la recta r_2 es paralela al plano π determinado por P y r_1.

Alternativamente puede utilizarse este segundo procedimiento (figura 7.17):

(I) Calcular la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r_1 (π_1).

(II) Calcular la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r_2 (π_2).

(III) Recta intersección de π_1 y π_2.

El problema carece de solución si el plano π_1 es paralelo a r_2 o el plano π_2 es paralelo a r_1.

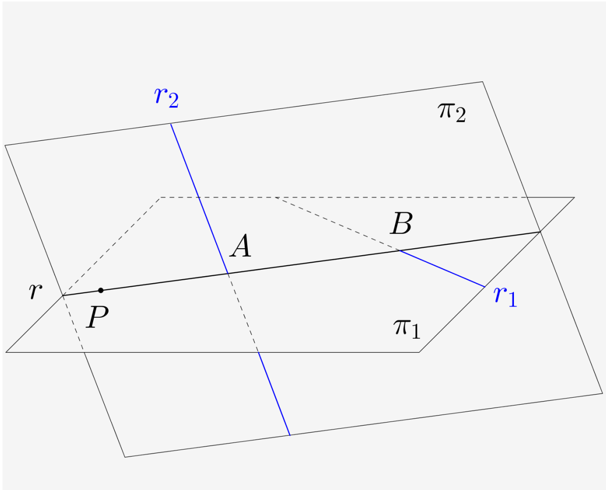


Figura 7.17: Recta que pasa por un punto y corta a otras dos (II)

Ejercicio 43. Halla la ecuación de la recta que pasando por el punto $P(2, 0, -1)$ corta a las rectas:

$$r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}; \qquad r_2 : \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$$

Solución:

Resolvamos por el primer procedimiento:

(I) Plano que pasa por P y contiene a r_1. Tomando como vectores directores, el vector director de la recta y el vector $\overrightarrow{PQ}$ donde Q es un punto de r_1, por ejemplo $Q(2, 2, -1)$ se tiene:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0 \\ y & -1 & 2 \\ z+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

o bien:

$$-x + 2z + 4 = 0$$

(II) Intersección de este plano con la recta r_2. Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -x+2z+4=0 \\ x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es el punto $A(2, -6, -1)$

(III) Ecuación de la recta AP. Tomando como vector director:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o más sencillo} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la ecuación es:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$$

Por el segundo procedimiento obtendríamos:

(I) Plano que pasa por P y contiene a r_1. Este plano hemos visto que tiene por ecuación $-x + 2z + 4 = 0$.

(II) Plano que pasa por P y contienen a r_2. El haz de planos de r_2 es:

$$x + y + 4 + \lambda(y - 3z + 3) = 0$$

Si el plano ha de contener a $P(2, 0, -1)$:

$$2 + 0 + 4 + \lambda(0 - 3 \cdot (-1) + 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1$$

Por lo que el plano es:

$$x + y + 4 + (-1)(y - 3z + 3) = 0 \quad \text{o bien}$$

(III) La ecuación de la recta buscada como intersección de los dos planos es:

$$\begin{cases} -x+2z+4=0 \\ x+3z+1=0 \end{cases}$$

♠♠♠♠

Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

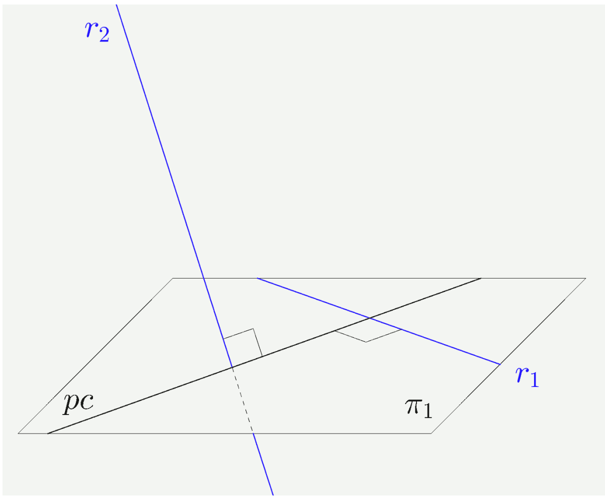


Figura 7.18: Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

Sean dos rectas que se cruzan r_1 y r_2. Existe siempre una única recta que las corta perpendicularmente. La dirección de esta perpendicular común será la del producto vectorial de los vectores directores de r_1 y r_2. Una vez conocido este vector se puede obtener la perpendicular común a ambas rectas por el siguiente procedimiento:

(I) Calcular el plano π_1 que contiene a r_1 y a la perpendicular común. Este plano está determinado por un punto cualquiera de r_1 y por los vectores directores de r_1 y de la perpendicular común.

(II) De la misma manera se calcula la ecuación del plano π_2 que contiene a r_2 y a la perpendicular común.

(III) La recta buscada es la intersección de los planos π_1 y π_2 (ver figura 7.18).

Ejercicio 44. Calcular la ecuación de la perpendicular común a las rectas:

$$r_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}; \qquad r_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Solución:

El vector director de la perpendicular común es el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas,

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u_1} \times \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El plano que contiene a r_1 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -4 \\ y & -1 & 5 \\ z+1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies -18x - 15y + z + 37 = 0$$

El plano que contiene a r_2 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2 & -4 \\ y+1 & 1 & 5 \\ z-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies -x - 5y + 7z - 15 = 0$$

de forma que la ecuación de la perpendicular común como intersección de planos es:

$$\begin{cases} -18x - 15y + z + 37 = 0 \\ -x - 5y + 7z - 15 = 0 \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 45. Calcular la ecuación de la perpendicular común a las rectas:

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+5}{-3} \; : \qquad r_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

Solución:

Resolveremos este problema por un procedimiento diferente. Los vectores directores de las rectas son:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sean A_1 y A_2 los puntos de corte de la perpendicular común con las rectas r_1 y r_2. Puesto que estos puntos están sobre estas rectas, sus coordenadas son:

$$A_1(1+2\lambda, 5+3\lambda, -5-3\lambda); \qquad A_2(3+\mu, -4+2\mu, 2-\mu)$$

y el vector $\overrightarrow{A_1A_2}$ es:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} \mu-2\lambda+2 \\ 2\mu-3\lambda-9 \\ -\mu+3\lambda+7 \end{pmatrix}$$

Este vector tiene la dirección de la perpendicular común, por ello el producto escalar de este vector por cada uno de los vectores directores de las rectas debe ser cero:

$$\begin{cases} 2(\mu-2\lambda+2)+3(2\mu-3\lambda-9)-3(-\mu+3\lambda+7)=0 \\ 1(\mu-2\lambda+2)+2(2\mu-3\lambda-9)-1(-\mu+3\lambda+7)=0 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} 11\mu-22\lambda-44=0 \\ 6\mu-11\lambda-23=0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema resulta:

$$\lambda=-1\,; \quad \mu=2$$

Sustituyendo estos valores de λ y μ se obtiene que los puntos de corte de las rectas con la perpendicular común son $A_1(-1,2,-2)$ y $A_2(5,0,0)$. La ecuación de la perpendicular común es:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

Este procedimiento permite calcular no solamente la ecuación sino a la vez los puntos de corte de las dos rectas con la perpendicular común. Además podría obtenerse fácilmente la distancia entre las dos rectas como la distancia entre A_1 y A_2.

♠♠♠♠

7.13. Lugares geométricos

El **plano mediador** de un segmento es el plano perpendicular al segmento por su punto medio. También puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

Sea el segmento determinado por los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$. Sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano mediador AB. Se cumple que:

$$d(X,A) = d(X,B)$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2} \qquad \text{o bien}$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$$

Esta es la ecuación del plano mediador de AB. Simplificando los términos de segundo grado queda:

$$2x(x_2-x_1)+2y(y_2-y_1)+2z(z_2-z_1)+x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2=0$$

El **plano bisector** de dos planos que se cortan es el conjunto de puntos que equidistan de los dos planos.

Sean los planos $\pi_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Si $X(x, y)$ es un punto del plano bisector, se cumple que:

$$d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2)$$

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Como vemos, hay dos bisectrices b_1 y b_2 perpendiculares entre sí.

La **superficie esférica** de **centro** $C(a, b, c)$ y **radio** r es el conjunto de puntos que se encuentran a una distancia r de C. La ecuación de la superficie esférica es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Tema 8

Probabilidad

8.1. Experimentos aleatorios

Experimentos como los de lanzar un dado, tirar una moneda, sacar una carta de la baraja, etc, se llaman **experimentos aleatorios**.

Los experimentos aleatorios se caracterizan por:

– Cuando se realizan una sola vez no puede predecirse el resultado.
– Cuando el experimento se repite muchas veces pueden hacerse predicciones sobre las frecuencias de los distintos resultados. Estas frecuencias se llaman **probabilidades**.

Para describir matemáticamente un experimento aleatorio necesitamos:

– El **espacio muestral** que es el conjunto formado por los resultados posibles del experimento.
– Una **función de probabilidad** que asocia a cada elemento del espacio muestral un número comprendido entre 0 y 1 (su probabilidad). La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, el espacio muestral sería:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si el dado es simétrico, a cada uno de estos resultados se les asocia una probabilidad igual a $\frac{1}{6}$.

Distinguimos tres formas de asignar probabilidades:

– Atendiendo a la **simetría** del experimento. Por ejemplo, en muchos juegos de azar se asigna la misma probabilidad a todos los resultados.
– De forma **empírica**, repitiendo el experimento muchas veces. Las frecuencias relativas se toman como probabilidades.
– Por medio de un **modelo teórico**. Estos modelos se llaman distribuciones de probabilidad.

8.2. Sucesos

Un **suceso** S es un subconjunto del espacio muestral E.

Por ejemplo en el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

A = «obtener un resultado par» $= \{2, 4, 6\}$

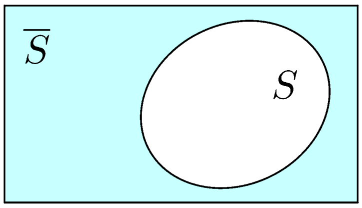
B = «obtener un número mayor que 2» $= \{3, 4, 5, 6\}$

El espacio muestral considerado como subconjunto de sí mismo se llama **suceso seguro**.

El **suceso imposible** es el que no tiene ningún elemento.

La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los resultados que lo componen.

Suceso contrario



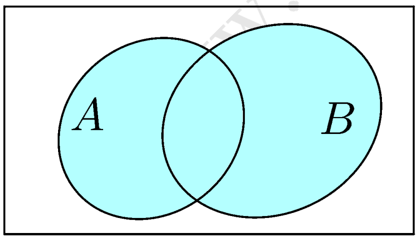
El conjunto de resultados de E que no están en S se llama **suceso contrario** de S y se representa mediante $\overline{S}$ o S':

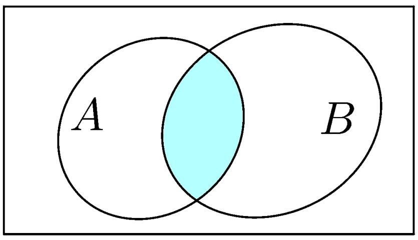
$$A = \{2,4,6\}\ ; \qquad \overline{A} = \{1,3,5\}$$
$$B = \{3,4,5,6\}\ ; \qquad \overline{B} = \{1,2\}$$

La probabilidad del suceso contrario es:

$$\mathrm{p}(\bar{S}) = 1 - \mathrm{p}(S)$$

Unión e intersección de sucesos





El suceso $A \cup B$ está formado por los resultados que están en A o en B.

El suceso $A \cap B$ está formado por los resultados que están en A y en B.

Si $A \cap B$ es el suceso imposible, A y B son **incompatibles**.

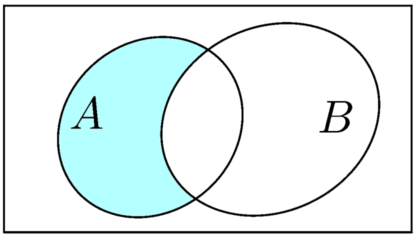
Los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ cumplen que:

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B)$$

Además verifican las relaciones de **de Morgan**:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\ ; \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Diferencia de sucesos



La **diferencia** de A y B es el conjunto de elementos de A que no pertenecen a B. Se representa por $A - B$ o $A \cap \overline{B}$.

La probabilidad de la diferencia de sucesos es:

$$\mathrm{p}(A - B) = \mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(A \cap B)$$

8.3. Espacios equiprobables. Regla de Laplace

En muchos experimentos todos los resultados del espacio muestral tienen la misma probabilidad. En este caso, el espacio se llama **equiprobable**.

Si el espacio tiene n resultados posibles, la probabilidad de cada uno de ellos es:

$$p = \frac{1}{n}$$

La probabilidad de un suceso A de m resultados es:

$$\mathrm{p}(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados del suceso}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ total de resultados}}$$

Esta fórmula se suele recordar de la siguiente forma: la probabilidad es igual al número de casos favorables dividido entre el número de casos posibles (**regla de Laplace**).

Ejercicio 46. Se lanza una moneda tres veces:

(*a*) Escribir el espacio muestral.
(*b*) Calcular la probabilidad de obtener exactamente una cruz.

Solución:

Llamando a los resultados C (cara) y X (cruz), los posibles resultados son:

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Todos los resultados son igualmente probables. Entonces:

$$\mathrm{p}(\text{«obtener exactamente una cruz»}) = \frac{3}{8}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 47. En una clase de 25 estudiantes, 15 estudian francés, 13 estudian malayo y 5 no estudian ninguna lengua. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés y malayo?

Solución:

Llamemos $F =$ «el elegido estudia francés», $M =$ «el elegido estudia malayo». Los datos son:

$$\mathrm{p}(F) = \frac{15}{25}\ ; \qquad \mathrm{p}(M) = \frac{13}{25}\ ; \qquad \mathrm{p}(\overline{F} \cap \overline{M}) = \frac{5}{25}$$

Entonces:

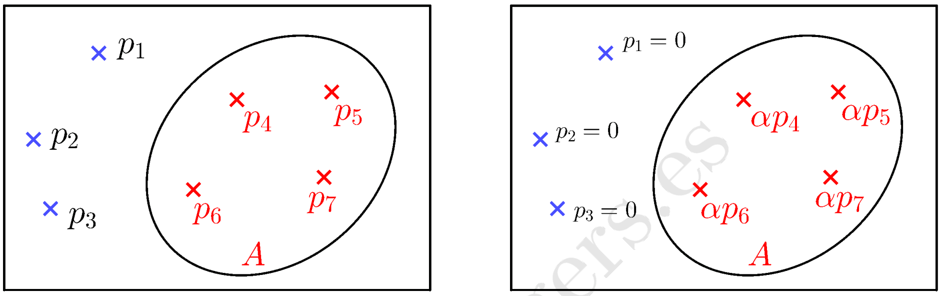
$$p(\overline{F} \cap \overline{M}) = p(\overline{F \cup M}) = 1 - p(F \cup M) = \frac{5}{25} \quad \Longrightarrow \quad p(F \cup M) = \frac{20}{25}$$

$$p(F \cap M) = p(F) + p(M) - p(F \cup M) = \frac{15}{25} + \frac{13}{25} - \frac{20}{25} = \frac{8}{25}$$

♠♠♠♠

8.4. Probabilidad condicionada

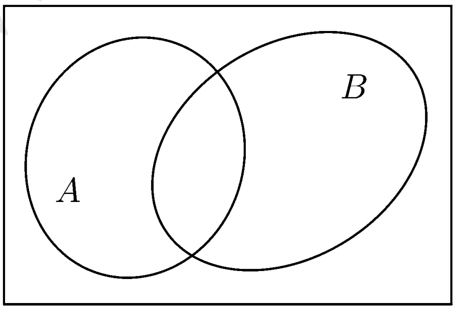
Supongamos que tenemos una información parcial del resultado de un experimento. Sabemos que ha ocurrido el suceso A. No sabemos qué resultado se ha obtenido pero sabemos que es un resultado del suceso A. ¿Cómo cambian las probabilidades con esta información?



Las probabilidades de los resultados fuera de A pasan a ser cero. Las de los resultados de A se multiplican por un factor α. ¿Cuánto vale α?

$$\alpha p_4 + \alpha p_5 + \alpha p_6 + \alpha p_7 = \alpha(p_4 + p_5 + p_6 + p_7) = \alpha p(A) = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{p(A)}$$



La probabilidad del suceso B condicionada al suceso A es:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Esto se puede escribir como:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) \qquad \text{(regla del producto)}$$

Ejercicio 48. En una fuente hay 5 naranjas y 3 limones. Se seleccionan dos frutas al azar. Calcular la probabilidad de que sean

(a) Dos limones
(b) Una naranja y un limón

Solución:

Sean los sucesos L_1 = «la primera fruta es un limón», L_2 = «la segunda fruta es un limón», N_1 = «la primera fruta es una naranja» y N_2 = «la segunda fruta es una naranja».

(a) $\mathrm{p}(L_1 \cap L_2) = \mathrm{p}(L_1) \cdot \mathrm{p}(L_2|L_1) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} = \dfrac{6}{56}$

(b) $\mathrm{p}\left((L_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap L_2)\right) = \mathrm{p}(L_1) \cdot \mathrm{p}(N_2|L_1) + \mathrm{p}(N_1) \cdot \mathrm{p}(L_2|N_1) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{30}{56}$

♠♠♠♠

Sucesos independientes

Si $\mathrm{p}(B|A) = \mathrm{p}(B)$ los sucesos A y B son **independientes**.

Por ejemplo la probabilidad de sacar un as de una baraja es:

$$\mathrm{p}(\text{«sacar un as»}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Si sabemos que se ha sacado una carta de oros:

$$\mathrm{p}(\text{«sacar un as»}|\text{«sacar oros»}) = \frac{\mathrm{p}(\text{«sacar el as de oros»})}{\mathrm{p}(\text{«sacar oros»})} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{10}$$

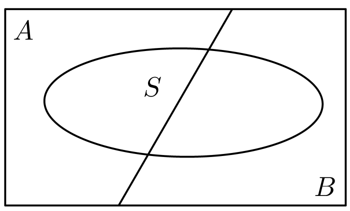
Los sucesos «sacar un as» y «sacar oros» son independientes.

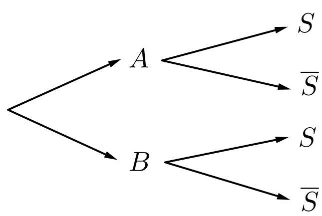
Si los sucesos son independientes:

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B|A) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B)$$

Probabilidad total

En ocasiones se conocen las probabilidades condicionadas de un suceso y se desea conocer la probabilidad total. El problema responde al siguiente esquema:



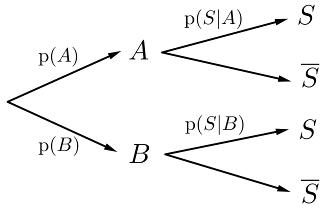


La probabilidad del suceso S es igual a:

$$\mathrm{p}(S) = \mathrm{p}(A \cap S) + \mathrm{p}(B \cap S) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(S|A) + \mathrm{p}(B) \cdot \mathrm{p}(S|B)$$

Fórmula de Bayes

Si en el problema anterior:



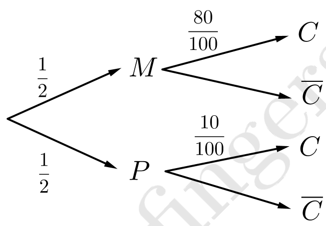
se sabe que se ha realizado el suceso S y se quiere calcular la probabilidad de A o de B:

$$\mathrm{p}(A|S) = \frac{\mathrm{p}(A \cap S)}{\mathrm{p}(S)} = \frac{\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(S|A)}{\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(S|A) + \mathrm{p}(B) \cdot \mathrm{p}(S|B)}$$

Ejercicio 49. Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

(*a*) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
(*b*) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:



Aplicando la fórmula de la probabilidad total y la de Bayes:

$$\mathrm{p}(C) = \mathrm{p}(M) \cdot \mathrm{p}(C|M) + \mathrm{p}(P) \cdot \mathrm{p}(C|P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{80}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100} = \frac{45}{100}$$

$$\mathrm{p}(M|C) = \frac{\mathrm{p}(M \cap C)}{\mathrm{p}(C)} = \frac{\mathrm{p}(M) \cdot \mathrm{p}(C|M)}{\mathrm{p}(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{80}{100}}{\frac{45}{100}} = \frac{80}{90}$$

♠♠♠♠

Tema 9

Variable aleatoria

9.1. Distribuciones de probabilidad

Una **distribución de probabilidad** es la representación matemática de un experimento aleatorio.

Está compuesta de:

(a) La **variable aleatoria**. Puede ser discreta o continua y toma como valores los resultados del experimento. La variable aleatoria es **discreta** si toma un conjunto finito de valores. Es **continua** si toma como valores un intervalo de números reales.

(b) Una **función de probabilidad**. Se define de manera diferente según la variable aleatoria sea discreta o continua.

9.2. Distribuciones de variable discreta

La variable aleatoria X toma un conjunto finito de valores $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

La **función de probabilidad (pdf)** asigna una probabilidad a cada uno de estos valores:

$$f(x) = \mathrm{p}(X = x)$$

La probabilidad se puede asignar también mediante la **función de distribución (cdf)** que es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual que x:

$$F(x) = \mathrm{p}(X \leq x)$$

Por ejemplo, supongamos que se lanza cuatro veces una moneda equilibrada y sea X la variable aleatoria que representa el número de caras obtenidas en los lanzamientos. La variable X puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

La función de probabilidad está dada en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Supongamos ahora que en una caja hay 3 bolas blancas y 5 bolas negras y se extraen al azar 3 bolas sin reemplazamiento. Sea Y la variable aleatoria que representa el número de bolas blancas extraídas. La variable Y puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.

La función de probabilidad es la siguiente:

y_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

Valor esperado, varianza, desviación

Sea la variable aleatoria X cuya función de probabilidad está dada por la siguiente tabla:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	$\ldots$

La **media o valor esperado** y la **varianza** se definen por:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum p_i x_i \; ; \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \sum p_i \left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2 = \sum p_i x_i^2 - \mu^2$$

La **desviación típica** σ es la raíz cuadrada de la varianza.

En el ejemplo que hemos visto anteriormente

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

La media sería:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{4}{16} \cdot 1 + \frac{6}{16} \cdot 2 + \frac{4}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{32}{16} = 2$$

y la varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{16}(0-2)^2 + \frac{4}{16} \cdot (1-2)^2 + \frac{6}{16} \cdot (2-2)^2 + \frac{4}{16} \cdot (3-2)^2 + \frac{1}{16} \cdot (4-2)^2 = 1$$

Mediante la otra fórmula:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{16} \cdot 0^2 + \frac{4}{16} \cdot 1^2 + \frac{6}{16} \cdot 2^2 + \frac{4}{16} \cdot 3^2 + \frac{1}{16} \cdot 4^2 - 2^2 = \frac{80}{16} - 4 = 1$$

La desviación típica es la raíz de la varianza y también es igual a 1.

9.3. Distribuciones de variable continua

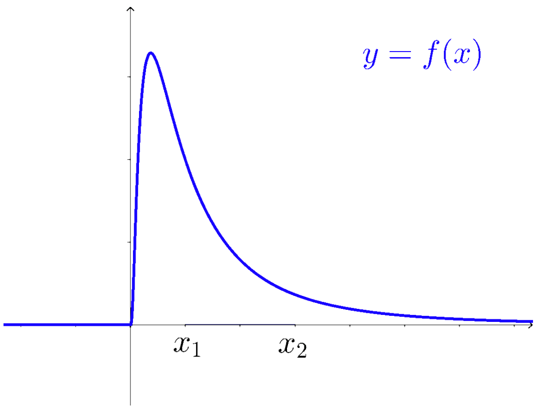
La variable aleatoria puede tomar las valores de un intervalo $[a, b]$ (a y b pueden ser infinitos.

La probabilidad queda determinada por la **función de densidad (pdf)** $f(x)$ de tal forma que:

$$\mathrm{p}(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1, se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

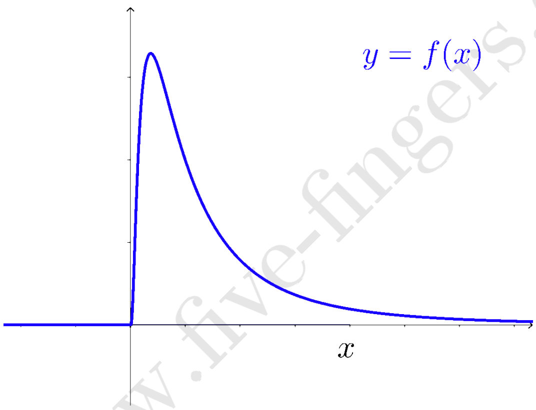


La **función de distribución (cdf)** representa la probabilidad acumulada:

$$F(x) = \mathrm{p}(X \leq x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

también:

$$\mathrm{p}(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$



La función de densidad es la derivada de la función de distribución:

$$f(x) = F'(x)$$

Media, varianza y desviación típica

Las fórmulas de la media y la varianza son iguales que las de la variable discreta sustituyendo la suma por una integral:

$$\mathrm{E}(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_a^b (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \mathrm{E}(X)^2$$

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

Ejercicio 50. Una variable aleatoria continua tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$\mathrm{p}(x) = \begin{cases} k(2x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(*a*) Hallar el valor de k.
(*b*) Calcular $\mathrm{p}\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right)$.

Solución:

(*a*) Puesto que la suma de las probabilidades debe ser igual a 1:

$$k\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = k\left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}\cdot k = 1\,; \qquad k = \frac{3}{4}$$

(*b*)

$$\mathrm{p}\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{8}}{3} - \frac{1}{16} - \frac{\frac{1}{64}}{3}\right) = \frac{29}{256}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 51. La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax\cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(*a*) Calcular a (*b*) Calcular la función de distribución (*c*) Hallar $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución:

(*a*) Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = 1$$

Integrando por partes:

$$a\Big[x\operatorname{sen}x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$$

y de aquí:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} = \frac{2}{\pi - 2}$$

(*b*) La función de distribución es entonces (si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned}\mathrm{p}(X \leq x) &= \frac{2}{\pi - 2}\Big[x\operatorname{sen}x + \cos x\Big]_0^x \\ &= \frac{2}{\pi - 2}\,(x\operatorname{sen}x + \cos x - 1)\end{aligned}$$

si $x \geq \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{p}(X \leq x) = 1$.

(*c*) Con esa función de distribución:

$$\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \simeq 0{,}460$$

♠♠♠♠

9.4. La distribución binomial o de Bernouilli

La distribución binomial es un modelo matemático del siguiente experimento:

- Una prueba tiene dos resultados posibles: éxito con probabilidad p y fracaso con probabilidad $q = 1 - p$.
- La prueba se repite n veces. Las pruebas son independientes.
- El resultado es el número de éxitos que se obtienen.

Sea $X =$ «número de éxitos obtenidos». X puede tomar los valores 0, 1, 2, …, n.

La función de probabilidad es:

$$\mathrm{p}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

El valor esperado es $\mathrm{E}(X) = np$ y la varianza $\mathrm{Var}(X) = npq$.

Si una variable aleatoria X tiene una función de probabilidad como esta, diremos que sigue la distribución binomial $\mathrm{B}(n, p)$ y escribiremos $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

Ejercicio 52. Supongamos que se lanza un dado 8 veces y contamos el número de ocasiones en las que se obtiene un múltiplo de 3. Calcular el valor esperado y la varianza.

Solución:

Sea el éxito de la prueba obtener un múltiplo de 3 y X la variable que representa el número de éxitos.

$X \sim \mathrm{B}\left(8, \frac{1}{3}\right)$. Las probabilidades son las siguientes:

$$\mathrm{p}(X = 0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0{,}0390 \qquad \mathrm{p}(X = 1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0{,}1561 \qquad \mathrm{p}(X = 2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0{,}2731$$

$$\mathrm{p}(X = 3) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0{,}2731 \qquad \mathrm{p}(X = 4) = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0{,}1707 \qquad \mathrm{p}(X = 5) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0{,}0683$$

$$\mathrm{p}(X = 6) = \binom{8}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0{,}0171 \qquad \mathrm{p}(X = 7) = \binom{8}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 0{,}0024 \qquad \mathrm{p}(X = 8) = \binom{8}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0{,}0002$$

El valor esperado es:

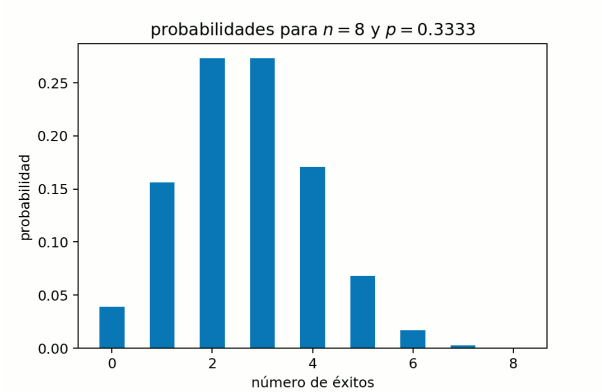
$$\mathrm{E}(X) = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

La varianza y la desviación típica:

$$\mathrm{Var}(X) = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}\,; \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{4}{3}$$

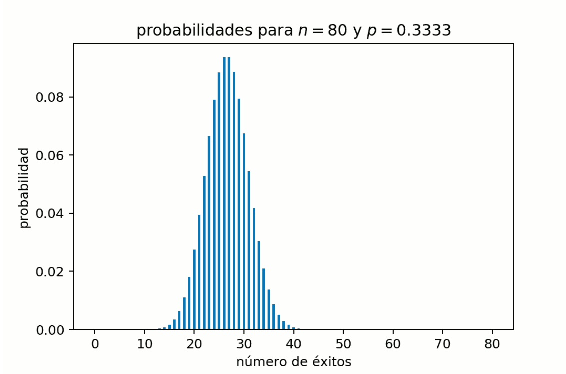
♠♠♠♠

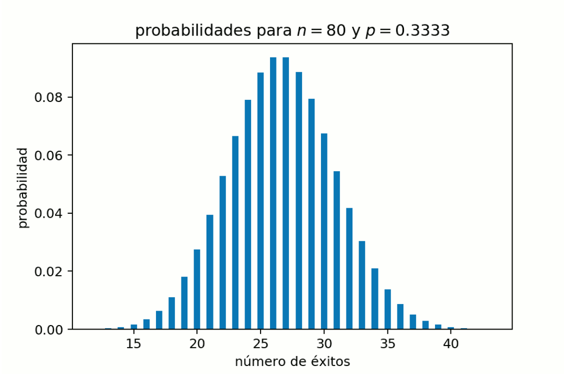
Si representamos en un diagrama de barras las probabilidades obtenidas en el ejercicio anterior:



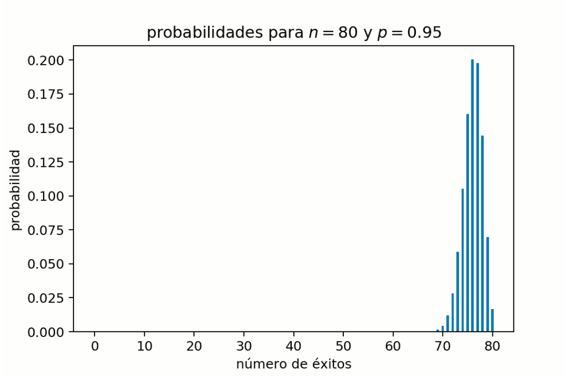
observamos que la probabilidades no se distribuyen simétricamente y hay un sesgo hacia la derecha.

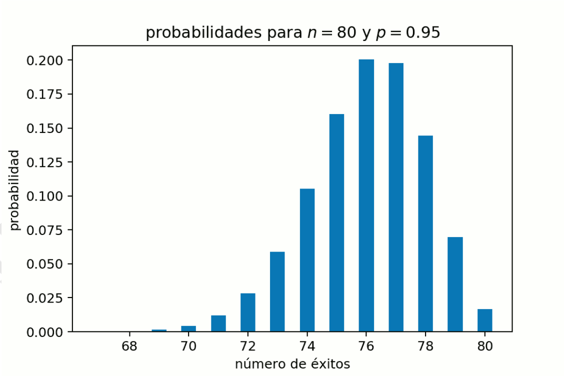
Sin embargo si representamos el diagrama de barras para un valor grande de n, en este caso para $n = 80$, la distribución sí es simétrica.





Cabría pensar que la distribución es simétrica para valores grandes de n. La figura siguiente muestra que esto no es así. Si los valores de p, de la probabilidad de éxito son próximos a 0 o a 1, vuelve a aparecer el sesgo:





En general, se estima que la distribución es aproximadamente simétrica si los valores de np y nq son mayores que 5. Esta propiedad la aprovecharemos más adelante para calcular los valores de la función de distribución de la distribución binomial.

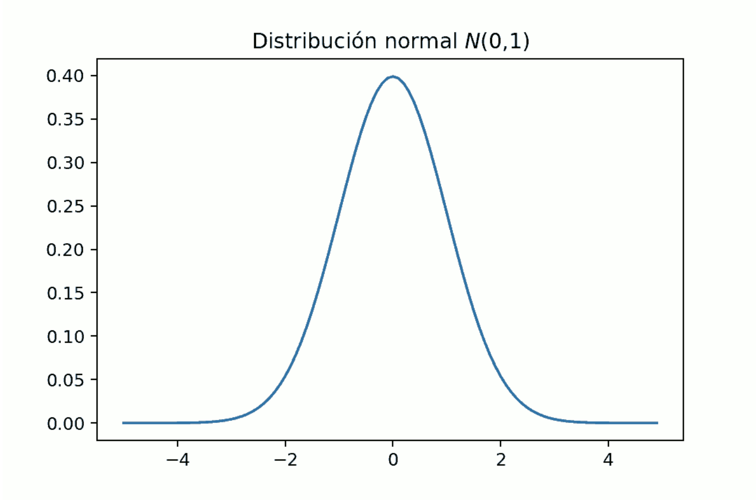
9.5. La distribución normal

La distribución normal standard $\mathrm{N}(0, 1)$ es una distribución de variable continua. La variable aleatoria se suele representar por Z y su función de densidad es;

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

La media o valor esperado de esta distribución es cero y la desviación típica es igual a 1.

La gráfica de esta función es:



Las probabilidades de la distribución normal son complicadas de obtener por integración.

Se suelen usar tablas con los valores de la función de distribución $\Phi(x)$. La tabla de valores de esta función aparece en la página siguiente,

En la tabla solamente aparecen los valores positivos de x. Para calcular los valores de $\Phi(x)$ para los x negativos hay que tener en cuenta que de la simetría de la función resulta que:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(1{,}25 \le Z \le 2{,}23) &= \Phi(2{,}23) - \Phi(1{,}25) \\ &= 0{,}9871 - 0{,}8944 \\ &= 0{,}0927 \end{aligned}$$

Si uno o los dos valores de z son negativos:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(-1{,}25 \le Z \le 2{,}23) &= \Phi(2{,}23) - \Phi(-1{,}25) \\ &= \Phi(2{,}23) - (1 - \Phi(1{,}25)) \\ &= 0{,}9871 - (1 - 0{,}8944) \\ &= 0{,}9871 - 0{,}1056 \\ &= 0{,}8815 \end{aligned}$$

p

Cuadro 9.1: Tabla de la función de distribución $\Phi(z)$

z	0.00	0.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

La distribución $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$

Haciendo el cambio $x = \mu + \sigma z$ se obtiene la distribución normal de media μ y desviación típica σ que se representa por $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Las probabilidades de esta distribución se pueden obtener a partir de las de la distribución $\mathrm{N}(0,1)$ haciendo el cambio:

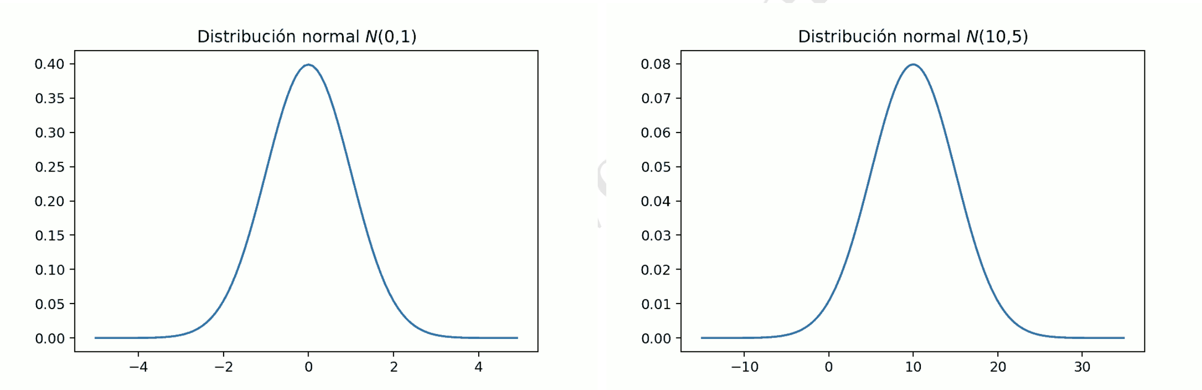
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

que se llama tipificar la variable.

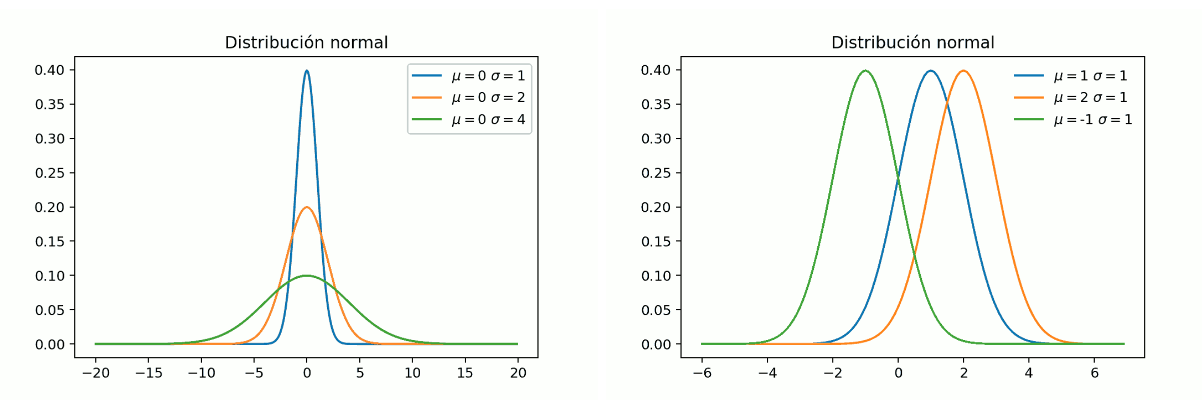
Por ejemplo, sea $X \sim \mathrm{N}(50, 10)$:

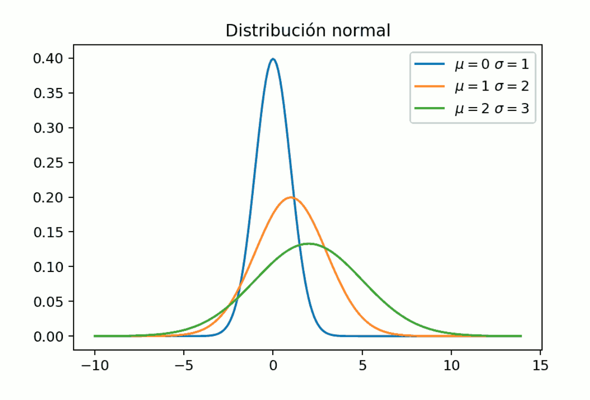
$$\mathrm{p}(X \leq 65) = \mathrm{p}\left(Z \leq \frac{65-50}{10}\right) = \mathrm{p}(Z \leq 1{,}5) = 0{,}9332$$

En la siguiente figura podemos comparar las gráficas de las funciones de densidad de $\mathrm{N}(1,0)$ y $\mathrm{N}(10,5)$. Vemos que puede considerarse que se trata de la misma curva y simplemente se ha aplicado una traslación a la derecha de 10 unidades (la media) y un cambio de escala en ambos ejes igual a la desviación típica, la escala en el eje de abscisas se ha multiplicado por 5 y la escala en el eje de ordenadas se ha dividido por 5.

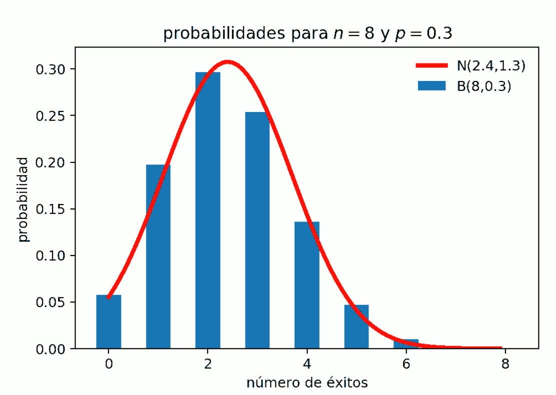


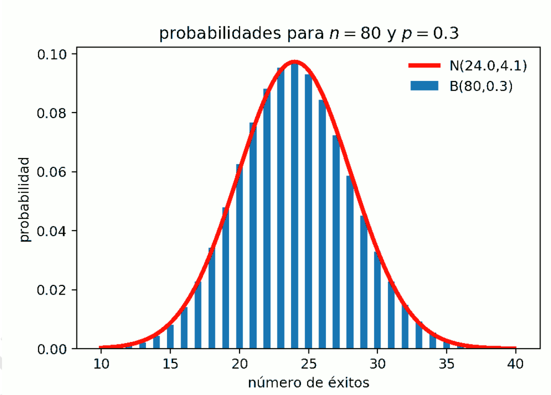
En las figuras siguientes se pueden comparar las gráficas de las funciones de densidad de varias distribuciones normales utilizando la misma escala en ambos ejes. Puede observarse que el cambio en la media produce una traslación de la curva sin variar la forma. Al aumentar la desviación la curva se ensancha y disminuye la altura del máximo.

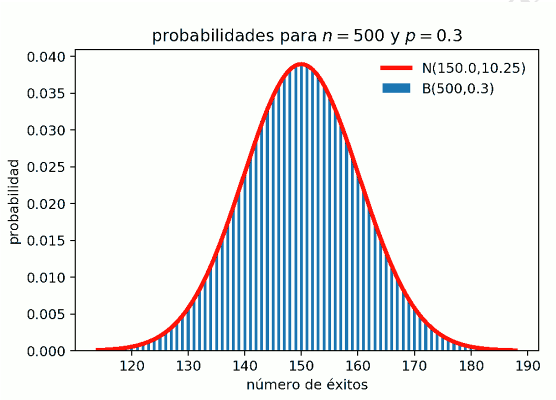


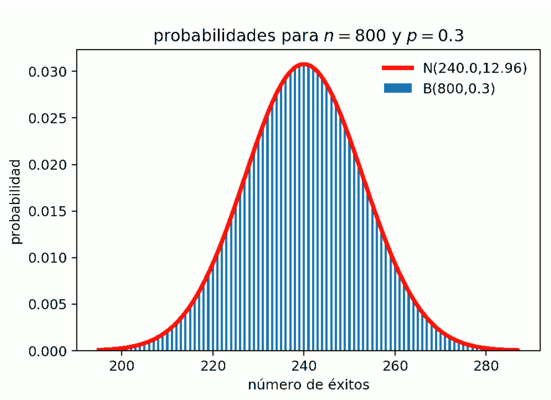


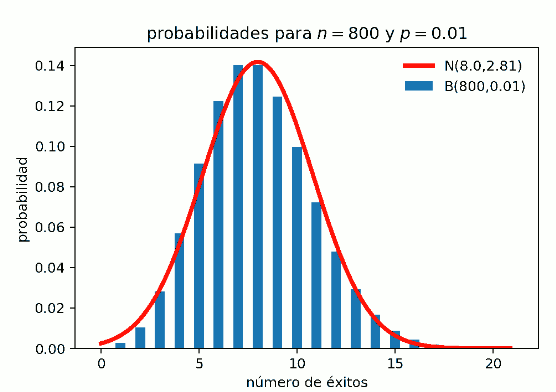
Distribuciones binomial y normal

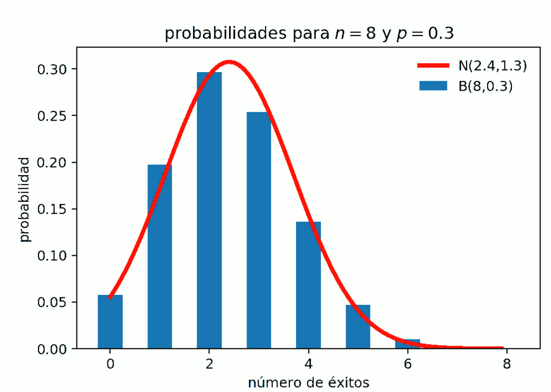












En las gráficas de la página anterior se han representado los diagramas de barras de la distribución binomial y la función de densidad de la distribución normal que tiene la misma media y desviación típica.

Podemos observar que, en los casos que hemos considerado anteriormente en que las probabilidades se distribuyen simétricamente, los valores de estas probabilidades de la binomial, coinciden con los de la función normal.

De forma más precisa, sea $X \sim \mathrm{B}(n,p)$ y $X' \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma)$ con $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$. Sea $f(x)$ la función de densidad de $X' \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma)$. Si np y nq son grandes:

$$\mathrm{p}(X = k) \simeq f(k)$$

La aproximación se suele utilizar para calcular probabilidades acumuladas de la distribución binomial. En ese caso se aplica la corrección de continuidad o de Yates que asocia a cada número entero k el intervalo $\left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]$ para calcular las probabilidades:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(X \leq k) &\simeq \mathrm{p}\left(X' \leq k + \frac{1}{2}\right) \\ \mathrm{p}(k_1 \leq X \leq k_2) &\simeq \mathrm{p}\left(k_1 - \frac{1}{2} \leq X' \leq k_2 + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Como regla práctica se suele decir que la aproximación es buena si np y nq son mayores que 5.