Matemáticas I

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2021-2022

Índice general

Tema 1

Raíces y logaritmos

1.1. Potencias.

Una potencia a^n, en donde n es un entero positivo, es un producto de factores iguales:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El factor que se repite a se llama base de la potencia y el número de veces que se repite, n, es el exponente.

Así definidas, las potencias tienen las cinco propiedades siguientes:

- Producto de potencias de la misma base:

  $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

  Para sumar potencias de la misma base, se suman los exponentes.

- Cociente de potencias de la misma base:

  $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

  Para dividir potencias de la misma base, se restan los exponentes.

- Potencia de una potencia:

  $$(a^m)^n = a^{mn}$$

  Para elevar una potencia a otro exponente, se multiplican ambos exponentes.

- Potencia de un producto:

  $$(MN)^n = M^n N^n$$

  La potencia de un producto es igual al producto de las potencias.

- Potencia de un cociente:

  $$\left(\frac{M}{N}\right)^n = \frac{M^n}{N^n}$$

  La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias.

Estas propiedades son sencillas de justificar a partir de la definición de potencia como un producto de factores iguales. Por ejemplo, la primera propiedad se demuestra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

El concepto de potencia puede extenderse a exponentes enteros no positivos de forma que se sigan cumpliendo las propiedades anteriores:

- ⋄ Si dividimos dos números iguales sabemos que el resultado es 1. Dividamos dos potencias iguales:

  $$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \quad \Longrightarrow \quad a^0 = 1$$

  Así pues, sea cual sea la base, si el exponente es cero, la potencia vale 1.

- ⋄ Sea ahora una potencia de exponente negativo. Para que se cumpla la primera propiedad debe ocurrir que:

  $$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

  El número a^{-n} es el inverso de a^n.

Así definidas, las potencias de exponente negativo o cero, cumplen las propiedades enumeradas anteriormente. Pero ya no se pueden definir como productos de factores iguales (un número no puede multiplicarse por sí mismo un número negativo de veces).

1.2. Raíces.

La raíz cuadrada de un número N es otro número que elevado al cuadrado es igual a N. Este número se representa por $\sqrt{N}$. Es decir, este número cumple que:

$$\left(\sqrt{N}\right)^2 = N$$

Los números positivos tienen dos raíces cuadradas. Por ejemplo hay dos raíces cuadradas de 9 que son $+3$ y -3 pues cualquiera de estos números elevados al cuadrado dan 9. Cuando queramos distinguir entre la raíz cuadrada positiva y negativa de un número pondremos el signo delante. Así, la raíz positiva de 3 se indica mediante $+\sqrt{3}$ y la negativa mediante $-\sqrt{3}$.

No existe raíz cuadrada de los números negativos puesto que cualquier número al cuadrado es positivo. Por ejemplo, la raíz cuadrada de -4 no puede ser ni $+2$ ni -2 puesto que $2^2 = (-2)^2 = 4$.

De forma similar se definen las raíces cúbicas, cuartas, etc. La raíz cúbica de N es un número que elevado al cubo es igual a N. La raíz cuarta de N es un número que elevado a la cuarta es igual a N. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{8} = 2 && \text{porque } 2^3 = 8 \\ &\sqrt[3]{-8} = -2 && \text{porque } (-2)^3 = -8 \\ &\sqrt[4]{81} = 3 && \text{porque } 3^4 = 81 \\ &\sqrt[4]{81} = -3 && \text{porque } (-3)^4 = 81 \end{aligned}$$

Todos los números, positivos y negativos, tienen una única raíz cúbica. Sin embargo, como en el caso de la raíz cuadrada, los números positivos tienen dos raíces cuartas y los números negativos no tienen ninguna.

En general, la raíz enésima de un número N es un número $\sqrt[n]{N}$ que elevado al exponente n es igual a N:

$$\left(\sqrt[n]{N}\right)^n = N$$

Esta definición, la podemos expresar también de la siguiente forma:

$$x^n = N \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{N}$$

en donde se aprecia que la raíz permite despejar una incógnita que está elevada a un exponente. En la expresión $\sqrt[n]{N}$, N es el radicando y n es el índice de la raíz.

En general, existe una única raíz de índice impar para todos los números. Los números positivos tienen dos raíces de índice par y los números negativos no tienen ninguna.

Las raíces tienen las propiedades siguientes:

- Raíz de un producto:

  $$\sqrt[n]{M \cdot N} = \sqrt[n]{M} \cdot \sqrt[n]{N}$$

  La raíz de un producto es igual al producto de las raíces.

- Raíz de un cociente:

  $$\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{\sqrt[n]{M}}{\sqrt[n]{N}}$$

  La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces.

- Raíz de una potencia. Siempre que existan las raíces se verifica que:

  $$\sqrt[n]{N^m} = \left(\sqrt[n]{N}\right)^m$$

  La raíz de una potencia es igual a la potencia de la raíz.

- Raíz de una raíz:

  $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{N}} = \sqrt[mn]{N}$$

  La raíz de una raíz es una raíz cuyo índice es el producto de los índices.

- Propiedad de simplificación:

  $$\sqrt[np]{N^{mp}} = \sqrt[n]{N^m}$$

  El índice de la raíz y el exponente del radicando pueden multiplicarse o dividirse por el mismo número.

1.3. Las raíces como potencias de exponente fraccionario.

Podemos pensar ahora qué sentido podemos darle a una potencia de exponente fraccionario como, por ejemplo $5^{\frac{1}{2}}$. Como en el caso de los exponentes negativos no puede considerarse como un producto de factores iguales pues no tiene sentido multiplicar 5 por sí mismo media vez.

Se trata entonces, de definir este número de tal forma que se cumplan las propiedades de las potencias que hemos visto. Elevando este número al cuadrado y aplicando la propiedad de la potencia de otra potencia resulta:

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 5^1 = 5$$

Vemos que $5^{\frac{1}{2}}$ es un número que, elevado al cuadrado, es igual 5. Pero el número que elevado al cuadrado es 5 es $\sqrt{5}$. Por consiguiente:

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

En general:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad \text{puesto que} \qquad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$$

y si el numerador es distinto de 1:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{puesto que} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Es decir, el denominador del exponente es el índice de la raíz y el numerador es el exponente del radicando.

1.4. Operaciones con radicales.

Vamos a ver algunos ejemplos de las operaciones más usuales con radicales.

- Extraer factores de la raíz:

$$\sqrt{128} = \sqrt{64\cdot 2} = 8\sqrt{2}$$
$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8\cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$$
$$\sqrt{27x^5} = \sqrt{9x^4\cdot 3x} = 3x^2\sqrt{3x}$$

- Introducir factores en la raíz:

$$5\sqrt{6} = \sqrt{25\cdot 6} = \sqrt{150}$$
$$3\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{27\cdot 10} = \sqrt[3]{270}$$
$$2x^3\sqrt{5x} = \sqrt{4x^6\cdot 5x} = \sqrt{20x^7}$$

- Multiplicar o dividir radicales. Si las raíces tienen el mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos. Si tienen distinto índice, aprovechando la propiedad de simplificación, se reducen a índice común y después se multiplican o dividen los radicandos:

$$\sqrt{18}\ \sqrt{6} = \sqrt{18\cdot 6} = \sqrt{108}$$
$$\sqrt{5}\ \sqrt[3]{10} = \sqrt[6]{5^3}\ \sqrt[6]{10^2} = \sqrt[6]{5^3\cdot 10^2} = \sqrt[6]{12500}$$
$$\sqrt{2x}\ \sqrt[3]{5x^2}; \sqrt[4]{3x^3} = \sqrt[12]{2^6x^6}\ \sqrt[12]{5^4x^8}\ \sqrt[12]{3^3x^9} = \sqrt[12]{1080000x^{23}}$$

- Suma de radicales. Solamente puede encontrarse una expresión más sencilla en el caso de que los radicales sean semejantes, esto es, radicales en los que después de extraer factores queden raíces iguales. Si no sucede así, la suma se deja indicada.

$$5\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = (5+3)\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$
$$2\sqrt{50} + 3\sqrt{32} = 2\sqrt{25\cdot 2} + 3\sqrt{16\cdot 2} = 2\cdot 5\sqrt{2} + 3\cdot 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2} - \sqrt{3} \qquad \text{esta suma debe dejarse indicada}$$

- Racionalizar denominadores. Se trata de obtener fracciones equivalentes sin raíces en el denominador. La técnica es diferente según aparezca o no en el denominador una suma o diferencia de raíces:

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$
$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}$$

1.5. Logaritmos.

Sea a un número positivo distinto de 1. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 3^x = 81 &\quad \Longrightarrow x = \log_3 81 = 4 \\ 2^x = 8 &\quad \Longrightarrow x = \log_2 8 = 3 \\ 5^x = \tfrac{1}{5} &\quad \Longrightarrow x = \log_5 \tfrac{1}{5} = -1 \\ 3^x = \sqrt{3} &\quad \Longrightarrow x = \log_3 \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

También puede definirse de la siguiente forma. Sea a un número positivo distinto de 1, se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Ejemplos:

$$\begin{array}{rcl} \log_7 49 = 2 & \text{ya que} & 7^2 = 49 \\ \log_5 125 = 3 & \text{ya que} & 5^3 = 125 \\ \log_4 2 = \frac{1}{2} & \text{ya que} & 4^{\frac{1}{2}} = 2 \end{array}$$

Primeras propiedades:

- Puesto que para $a > 0$ las potencias de a son positivas, la ecuación $a^x = N$ no tiene solución en el caso de que N sea negativo o cero. En consecuencia, solamente existen los logaritmos de los números positivos.
- Puesto que $a^0 = 1$, el logaritmo de 1 es igual a 0 en cualquier base:

  $$a^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_a 1 = 0$$

- Puesto que $a^1 = a$, el logaritmo de la base es igual a 1:

  $$a^1 = a \Longleftrightarrow \log_a a = 1$$

1.6. Propiedades de las logaritmos.

- **Logaritmo de un producto.** El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

  $$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

  Demostración:

  $$\left.\begin{array}{l} \log_a M = x \quad \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y \quad \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow \log_a(MN) = \log_a(a^x a^y) = \log_a a^{x+y} = x+y = \log_a M + \log_a N$$

- **Logaritmo de un cociente.** El logaritmo del cociente de dos números es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores:

  $$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

  Demostración:

  $$\left.\begin{array}{l} \log_a M = x \quad \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y \quad \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow \log_a \frac{M}{N} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a M - \log_a N$$

◇ **Logaritmo de una potencia.** El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a M^n = n \log_a M$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\log_a M^n &= \log_a \overbrace{(M \cdot M \cdot \ldots \cdot M)}^{n \text{ factores}} \\ &= \overbrace{\log_a M + \log_a M + \ldots + \log_a M}^{n \text{ sumandos}} \\ &= n \log_a M\end{aligned}$$

◇ **Logaritmo de una raíz.** El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

Demostración:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \log_a M^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a M$$

1.7. Cambio de base.

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración:

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos x a este número:

$$\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$$

Aplicando el logaritmo base a en esta última igualdad:

$$\begin{aligned}\log_a b^x = \log_a N &\Longrightarrow x \log_a b = \log_a N \\ &\Longrightarrow x = \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}\end{aligned}$$

Veamos ahora algunas aplicaciones de la fórmula del cambio de base:

◇ *Calcular con una aproximación a las milésimas* $\log_5 60$.

Puesto que la calculadora nos da los logaritmos neperianos:

$$\log_5 60 = \frac{\ln 60}{\ln 5} \simeq 2{,}544$$

◇ *Obtener sin calculadora* $\log_{32} 16$.

Puesto que los dos números son potencias de 2, pasando a esta base:

$$\log_{32} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 32} = \frac{4}{5}$$

◇ *Demostrar que* $\log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N$.

Cambiando a la base a:

$$\log_{\frac{1}{a}} N = \frac{\log_a N}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a N}{-1} = -\log_a N$$

Ejercicio 1. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_3 \sqrt{27}$ $\quad$ (b) $\log_{49} 343$ $\quad$ (c) $\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ $\quad$ (d) $\log_{25} \frac{1}{5}$

Solución:

(a) $\log_3 \sqrt{27} = \dfrac{1}{2}\log_3 27 = \dfrac{3}{2}$

(b) $\log_{49} 343 = \dfrac{\log_7 343}{\log_7 49} = \dfrac{3}{2}$

(c) $\log_9 \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} = \log_9 1 - \log_9 \sqrt[3]{3} = -\dfrac{\log_3 \sqrt[3]{3}}{\log_3 9} = -\dfrac{\frac{1}{3}}{2} = -\dfrac{1}{6}$

(d) $\log_{25} \dfrac{1}{5} = \log_{25} 1 - \log_{25} 5 = -\dfrac{1}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Conocido $\log 5 = 0{,}6990$, hallar $\log 12{,}5$ y $\log 0{,}032$.

Solución:

Conocido $\log 5$ se conoce también $\log 2$ ya que:

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0{,}6990 = 0{,}3010$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\log 12{,}5 &= \log \frac{25}{2} \\
&= \log 25 - \log 2 \\
&= \log 5^2 - \log 2 \\
&= 2\log 5 - \log 2 \\
&= 2 \cdot 0{,}6990 - 0{,}3010 \\
&= 1{,}0970
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 0{,}032 &= \log \frac{32}{1000} \\
&= \log 32 - \log 1000 \\
&= \log 2^5 - 3 \\
&= 5\log 2 - 3 \\
&= 5 \cdot 0{,}3010 - 3 \\
&= -1{,}4950
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

1.8. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones definidas por $y = a^x$ donde a es un número positivo cualquiera se llaman **funciones exponenciales**. Sea cual sea el valor de a, la función puede escribirse en la base e, es decir como $y = e^{kx}$ con $k = \ln a$ positivo o negativo según que a sea mayor o menor que 1. Como características más importantes de estas funciones destaquemos las siguientes:

- ◇ Sea cual sea el valor de x, e^{kx} es positivo.
- ◇ El eje de abscisas, esto es la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $y = e^{kx}$ en $-\infty$ o $+\infty$ según sea k positivo o negativo.
- ◇ La curva $y = e^{kx}$ no corta al eje de abscisas. Corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 1)$.

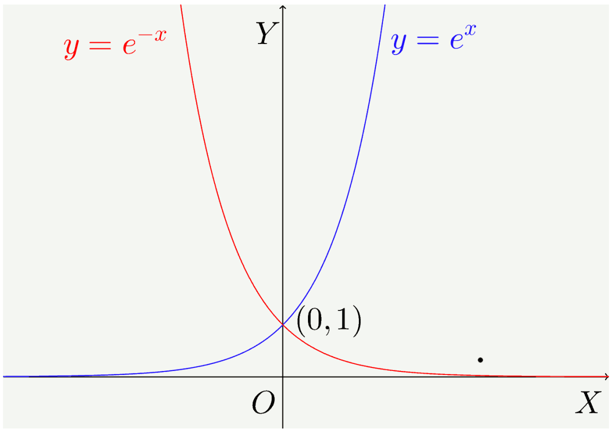


Figura 1.1: Función exponencial

Se llaman funciones logarítmicas las definidas por $f(x) = \log_a x$. Con ayuda de la fórmula del cambio de base de los logaritmos, cualquier función logarítmica puede expresarse como $y = k \cdot \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano o sea el logaritmo en la base e. Como propiedades fundamentales de estas funciones citaremos:

- ◇ Las funciones logarítmicas solo existen para x positivo.
- ◇ La recta $x = 0$ (el eje de ordenadas) es asíntota vertical de $y = k \cdot \ln x$.
- ◇ La curva $y = k \cdot \ln x$ no corta al eje de ordenadas. Corta al eje de abscisas en $(1, 0)$.

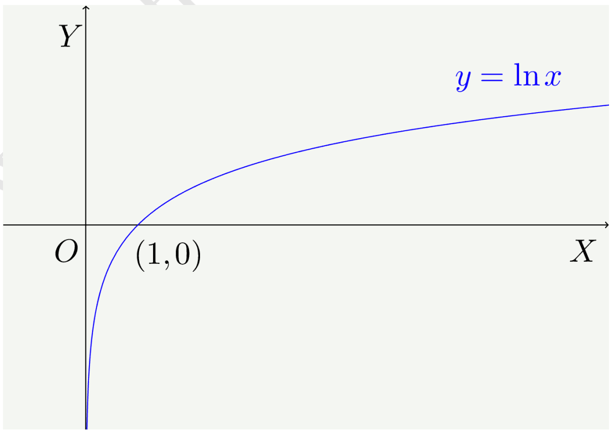


Figura 1.2: Función logarítmica

Tema 2

Polinomios y ecuaciones

2.1. Polinomios. Valor numérico.

Un polinomio es una expresión en la que aparecen operaciones indicadas de sumas y productos entre números y una variable x (indeterminada):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Los números a_0, a_1, ..., se llaman **coeficientes** del polinomio y cada uno de los sumandos es un **monomio**. El exponente de x en cada sumando es el grado del monomio y el mayor de todos ellos es el **grado del polinomio**. El coeficiente del monomio de mayor grado es el **coeficiente principal** del polinomio. El coeficiente del término de grado cero, esto es, el número que no multiplica a x se llama **término independiente** del polinomio. Es decir:

n: grado del polinomio
a_n: coeficiente principal
a_0: término independiente

Por ejemplo $2x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ es un polinomio de grado 3, su coeficiente principal es 2 y el término independiente es -1. El polinomio $x^2 - x$ es de grado 2, su coeficiente principal es 1 y el término independiente es 0.

El **valor numérico** (o simplemente valor) de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a. El valor del polinomio $P(x)$ para $x = a$ se representa por $P(a)$.

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2 \cdot (-3)^4 - 5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 2 \cdot 81 - 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 162 - 45 - 12 - 2 \\ &= 103 \end{aligned}$$

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini. Supongamos que queremos calcular el valor numérico para $x = a$. Escribimos los coeficientes del polinomio en orden descendente (completando con ceros cuando falte algún término). Multiplicamos el primer coeficiente por a y sumamos este producto al segundo coeficiente. El número así obtenido lo volvemos a multiplicar por

a y se lo sumamos al tercer coeficiente. Repitiendo el proceso, el último número que obtenemos es el valor numérico del polinomio.

Veamos un ejemplo. Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

	2	0	-5	4	-2
-3		-6	18	-39	105
	2	-6	13	-35	**103**

Más adelante veremos otra forma de interpretar los números que se obtienen mediante la regla de Ruffini.

2.2. Raíces de un polinomio.

Un número r es **raíz** de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(r) = 0$$

Para calcular las raíces del polinomio $P(x)$ se resuelve la ecuación $P(x) = 0$. De esta manera, resulta sencillo calcular las raíces de los polinomios de primer y segundo grado.

Recordemos que para polinomios de segundo grado, la existencia y el número de las raíces depende del valor del discriminante.

Sea el polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$. Las raíces de este polinomios son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama discriminante del polinomio. Según los valores del discriminante tenemos:

- $\Delta > 0$: el polinomio tiene dos raíces diferentes r_1 y r_2.
- $\Delta = 0$: las dos raíces coinciden. El polinomio tiene por consiguiente una sola raíz que podemos llamar r_{12}.
- $\Delta < 0$: el polinomio no tiene raíces.

Para calcular las raíces de polinomios de grado superior, resulta útil la siguiente **propiedad**: las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente:

$$\begin{aligned}
& r \text{ raíz de } a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\
\Longrightarrow\ & a_0 + a_1r + a_2r^2 + a_3r^3 + \cdots = 0 \\
\Longrightarrow\ & a_0 = -a_1r - a_2r^2 - a_3r^3 - \cdots \\
\Longrightarrow\ & a_0 = -r(a_1 + a_2r + a_3r^2 + \cdots) \\
\Longrightarrow\ & r \text{ es divisor de } a_0
\end{aligned}$$

Por ejemplo, las raíces enteras del polinomio $x^3 - 6x^2 + x - 4$ han de ser divisores de 4. Por tanto sólo pueden ser -1, 1, -2, 2, -4 y 4.

2.3. Teoremas del factor y del resto.

Teorema del factor. Si r es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x - r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x) = (x - r)Q(x)$$

Demostración:

- Sea r raíz del polinomio $P(x)$, es decir, $P(r) = 0$.
- Si se divide $P(x)$ por $x - r$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un resto R que cumplen:
$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$
- Para $x = r$:
$$P(r) = (r - r)Q(r) + R \quad \Longrightarrow \quad R = P(r) = 0$$
y por consiguiente $P(x) = (x - r)Q(x)$.

De acuerdo con el teorema del factor, si r es una raíz de un polinomio, en su descomposición factorial aparece un factor $x - r$. Si este factor aparece repetido dos veces, esto es, si en la descomposición factorial aparece el factor $(x - r)^2$, entonces la raíz r se llama **doble**. Si apareciese el factor $(x - r)^3$ la raíz sería **triple**, si apareciese $(x - r)^4$ sería **cuádruple**, etc.

Teorema del resto. El valor numérico del polinomio para $x = a$ es igual al resto de dividir ese polinomio por $x - a$.

Demostración:

Supongamos que al dividir $P(x)$ por $x - a$ da un cociente $C(x)$ y un resto R. Estos polinomios cumplen que:
$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$
y para $x = a$:
$$P(a) = (a - a)Q(a) + R = R$$

2.4. Descomposición factorial de un polinomio de segundo grado.

Según el valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, el polinomio de $ax^2 + bx + c$ puede tener cero, una o dos raíces. Si aplicamos el teorema del factor, en cada uno de estos casos, el polinomio se descompone de la siguiente forma:

- $\Delta > 0$. En este caso, el polinomio tiene dos raíces r_1 y r_2. De acuerdo con el teorema del factor, en su descomposición factorial deben aparecer los factores $x - r_1$ y $x - r_2$. Puesto que el coeficiente de x^2 es a la descomposición en factores debe ser:
$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$
- $\Delta = 0$. El polinomio tiene una sola raíz r_{12}. Este caso es igual que el anterior suponiendo que las dos raíces son iguales. La descomposición es:
$$ax^2 + bx + c = a(x - r_{12})^2$$
- $\Delta < 0$. El polinomio no tiene raíces. No puede descomponerse en factores.

Ejercicio 3. Descomponer en factores los polinomios (a) $18x^2 - 9x - 2$ (b) $4x^2 - 4x + 1$ (c) $x^2 + x + 1$

Solución:

(a) Calculamos las raíces del polinomio $18x^2 - 9x - 2$:
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{36} = \frac{9 \pm 15}{36} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \frac{2}{3} \\ r_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$
La descomposición factorial es:
$$18x^2 - 9x - 2 = 18 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{6}\right) = (3x - 2)(6x + 1)$$

(*b*) Como en el caso anterior:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{1}{2}$$

Puesto que el discriminante es cero, el polinomio tiene una raíz doble. Su descomposición factorial es:

$$4x^2 - 4x + 1 = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (2x-1)^2$$

(*c*) El discriminante de este polinomio es menor que cero. El polinomio no puede descomponerse en factores.

♠♠♠♠

Se llaman polinomios **primos o irreducibles** aquéllos que no pueden descomponerse en factores de grado inferior. Los polinomios de primer grado son primos puesto que multiplicando polinomios de grado inferior (polinomios de grado cero,es decir, números) no puede obtenerse un polinomio de primer grado.

Acabamos de ver que los polinomios de segundo grado con discriminante menor que cero también son primos. Puede demostrarse que no existen polinomios primos distintos de estos. En consecuencia, todo polinomio puede descomponerse como producto de polinomios de primer grado y de polinomios primos de segundo grado.

2.5. Regla de Ruffini.

La regla de Ruffini:

	2	0	-5	4	-2
-3		-6	18	-39	105
	2	-6	13	-35	103

puede interpretarse como una división en la que:

Dividendo:	$2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$
Divisor:	$x + 3$
Cociente:	$2x^3 - 6x^2 + 13x - 35$
Resto:	103

La regla de Ruffini facilita la búsqueda de las raíces enteras de un polinomio y su descomposición factorial. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 4. Descomponer en factores el polinomio $6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 40x - 12$.

Solución:

Buscamos raíces enteras. Éstas deben ser divisores del término independiente 12. Las posibles raíces enteras son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12. Probemos con -1 y $+1$:

	6	-17	-7	40	-12
-1		-6	23	-16	-24
	6	-23	16	24	-36

	6	-17	-7	40	-12
1		6	-11	-18	22
	6	-11	-18	22	10

Vemos que ni -1 ni $+1$ son raíces del polinomio. Probemos con -2 y $+2$:

	6	-17	-7	40	-12
-2		-12	58	-102	124
	6	-29	51	-62	112

	6	-17	-7	40	-12
2		12	-10	-34	12
	6	-5	-17	6	0

El número 2 es una raíz del polinomio, por consiguiente $x-2$ es un factor y podemos escribir:

$$6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 40x - 12 = (x-2)(6x^3 - 5x^2 - 17x + 6)$$

Busquemos ahora factorizar $6x^3 - 5x^2 - 17x + 6$. Ya hemos visto que -1, 1 y -2 no son raíces. Probemos de nuevo con 2:

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -5 & -17 & 6 \\ 2 & & 12 & 14 & -6 \\ \hline & 6 & 7 & -3 & 0 \end{array}$$

Tenemos de nuevo la raíz 2. Podemos escribir que:

$$\begin{aligned} 6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 40x - 12 &= (x-2)(6x^3 - 5x^2 - 17x + 6) \\ &= (x-2)(x-2)(6x^2 + 7x - 3) \\ &= (x-2)^2(6x^2 + 7x - 3) \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio $6x^2 + 7x - 3$ las obtenemos resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$6x^2 + 7x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} = \frac{-7 \pm 11}{12} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \frac{1}{3} \\ r_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

con lo que el polinomio factorizado queda finalmente:

$$\begin{aligned} 6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 40x - 12 &= (x-2)^2(6x^2 + 7x - 3) \\ &= (x-2)^2 \cdot 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \\ &= (x-2)^2 \cdot (3x-1)(2x+3) \end{aligned}$$

♠♠♠♠

2.6. Ecuaciones de primer grado.

El procedimiento general para resolver una ecuación de primer grado es el siguiente:

- ◇ Quitar denominadores multiplicando todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de todos ellos.
- ◇ Quitar paréntesis.
- ◇ Agrupar términos.
- ◇ Despejar la incógnita.

Veámoslo con un ejemplo:

Ejercicio 5. Resolver la ecuación:

$$\frac{x-4}{5} - 4(-2x+1) - \frac{-4x+2}{10} = 2(x-3) + \frac{5x+6}{2}$$

Solución:

- ◇ Multiplicamos ambos miembros por 10 y simplificamos:

$$\frac{10(x-4)}{5} - 10 \cdot 4(-2x+1) - \frac{10(-4x+2)}{10} = 10 \cdot 2(x-3) + \frac{10(5x+6)}{2}$$

$$2(x-4) - 40(-2x+1) - (-4x+2) = 20(x-3) + 5(5x+6)$$

- ◇ Quitamos paréntesis:

$$2x - 8 + 80x - 40 + 4x - 2 = 20x - 60 + 25x + 30$$

- ◇ Reducimos y agrupamos términos:

$$\begin{aligned} &86x - 50 = 45x - 30 \\ &86x - 45x = 50 - 30 \\ &41x = 20 \end{aligned}$$

- ◇ Finalmente despejamos y obtenemos la solución:

$$x = \frac{20}{41}$$

♠♠♠♠

Si después de agrupar términos se encontrase una ecuación del tipo $0 \cdot x = b$ con $b \neq 0$ querría decir que la ecuación no tiene solución, pues ningún número multiplicado por 0 da un producto distinto de cero. Si se encontrase una ecuación $0 \cdot x = 0$ querría decir que todo número es solución, pues cualquier número multiplicado por cero da cero.

2.7. Ecuaciones de segundo grado.

En la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se despeja la incógnita x mediante la fórmula conocida:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número de soluciones depende del signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Si éste es positivo, la suma de las dos soluciones vale:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

y su producto:

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Si el coeficiente principal vale 1 la suma y el producto de las soluciones son:

$$x_1 + x_2 = -b\,; \qquad x_1 x_2 = c \qquad (a = 1)$$

Ejercicio 6. Obtener una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $x_1 = -3$, y $x_2 = 7$.

Solución:

Si $a = 1$ tenemos queda:

$$x_1 + x_2 = -3 + 7 = 4 = -b\,; \qquad x_1 x_2 = -3 \cdot 7 = -21 = c$$

y la ecuación es:

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

A la misma ecuación se llega escribiéndola en forma factorizada:

$$(x + 3) \cdot (x - 7) = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Resolver la ecuación:

$$6x^2 - 1 + \frac{2x(3 - x)}{3} = \frac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6}$$

Solución:

Empezamos quitando denominadores multiplicando todos los términos por 6:

$$6 \cdot 6x^2 - 6 \cdot 1 + \frac{6 \cdot 2x(3 - x)}{3} = \frac{6 \cdot (5x^2 - 2)}{6} - 6 \cdot 4x^2 + \frac{6 \cdot 59}{6}$$

$$36x^2 - 6 + 12x - 4x^2 = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 59$$

Quitamos paréntesis y agrupamos términos en el primer miembro:

$$32x^2 + 12x - 6 = -19x^2 + 57$$

$$51x^2 + 12x - 63 = 0$$

$$17x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^4 + 4 \cdot 17 \cdot 21}}{2 \cdot 17} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1\,; \qquad x_2 = -\frac{21}{17}$$

♠♠♠♠

La fórmula de la ecuación de segundo grado permite calcular x en ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (ecuaciones bicuadradas). Llamando $t = x^2$ estas ecuaciones se escriben:

$$at^2 + bt + c = 0 \implies t = x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

y de forma parecida se resuelven ecuaciones del tipo $ax^6 + bx^3 + c = 0$ y similares.

Ejercicio 8. Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Solución:

Despejando:

$$x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

que nos da las soluciones:

$$x^2 = 9 \implies \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \qquad x^2 = 4 \implies \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

♠♠♠♠

2.8. Ecuaciones irracionales.

Se llaman así las ecuaciones en que la incógnita aparece bajo el signo de raíz. Para resolver estas ecuaciones seguiremos los siguientes pasos:

- ◇ Despejar la raíz.
- ◇ Elevar ambos miembros de la igualdad al cuadrado.
- ◇ Resolver la ecuación resultante.
- ◇ Comprobar las soluciones.

El último paso es necesario porque, al elevar al cuadrado, la ecuación que resulta es de grado superior y puede tener más soluciones que la ecuación original, aparte de que puede tener soluciones para las que la raíz cuadrada no tenga sentido. Por ejemplo, la ecuación

$$x - 1 = 3$$

tiene una sola solución $x = 4$, pero la ecuación

$$(x - 1)^2 = 3^2$$

tiene dos soluciones $x = 4$ y $x = -2$.

Ejercicio 9. Resolver la ecuación $\sqrt{40 - x^2} + 4 = x$

Solución:

- ◇ Despejamos la raíz:
  $$\sqrt{40 - x^2} = x - 4$$
- ◇ Elevamos al cuadrado:
  $$\left(\sqrt{40 - x^2}\right)^2 = (x - 4)^2 \implies 40 - x^2 = x^2 - 8x + 16$$
- ◇ Resolvemos
  $$0 = 2x^2 - 8x - 24 \implies x^2 - 4x - 12 = 0 \implies \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$
- ◇ Si comprobamos las soluciones vemos que $x = 6$ es válida pero $x = -2$ no lo es, porque para este valor el primer miembro es igual a 10 y el segundo a -2.

♠♠♠♠

2.9. Ecuaciones de grado superior al segundo.

Estas ecuaciones deben resolverse factorizando el polinomio con los métodos aprendidos en el tema anterior.

Ejercicio 10. Resolver la ecuación $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$.

Solución:

Buscamos una raíz entera entre los divisores de 10:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -6 & 3 & 10 \\
1 & & 1 & -5 & -2 \\
\hline
 & 1 & -5 & -2 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -6 & 3 & 10 \\
-1 & & -1 & 7 & -10 \\
\hline
 & 1 & -7 & 10 & 0
\end{array}$$

Vemos que -1 es una raíz del polinomio y que, por consiguiente, $x+1$ es un factor. Descomponemos el polinomio en factores y la ecuación queda:

$$(x+1)(x^2 - 7x + 10) = 0$$

No es preciso seguir descomponiendo el polinomio pues una vez que lo tenemos factorizado en polinomios de primer y segundo grado ya podemos resolver la ecuación. Igualando a cero cada uno de los factores resulta:

$$\begin{aligned}
x + 1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = -1 \\
x^2 - 7x + 10 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = 2\,; \quad x_3 = 5
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

2.10. Relaciones de Cardano.

Hemos visto que, si α y β son las raíces del polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ se cumple

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Las fórmulas que relacionan las raíces con los coeficientes de un polinomio se llaman relaciones de Cardano.

Sean α, β y γ las raíces del polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Por el teorema del factor tenemos queda

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

Desarrollando el segundo miembro:

$$\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\
&= a\big[x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma\big]
\end{aligned}$$

E igualando los coeficientes resulta

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}\,; \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}\,; \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

Estas son las relaciones de Cardano para el polinomio de tercer grado. Por el mismo procedimiento se pueden obtener fórmulas similares para polinomios de grado superior.

2.11. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Hay que tener en cuenta que de la definición de logaritmo

$$\log_a N = x \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = N$$

se desprende que en igualdades de este tipo, un exponente se despeja como logaritmo de la misma base, y que el argumento de la función logaritmo se despeja como una exponencial de la misma base.

Para transformar las ecuaciones hasta obtener igualdades de este tipo deben aplicarse las propiedades de las potencias y logaritmos.

Ejercicio 11. Resolver la ecuación $\ln x^3 - \ln x = \ln(2x+15)$

Solución:

Aplicando la propiedad del logaritmo del cociente:

$$\begin{aligned}
&\ln \frac{x^3}{x} = \ln(2x+15)\\
&\ln x^2 = \ln(2x+15)\\
&x^2 = 2x+15\\
&x^2 - 2x - 15 = 0
\end{aligned}$$

Las soluciones de esta última ecuación son $x = 5$ y $x = -3$. Ésta última no puede ser solución de la ecuación original porque no existen logaritmos de números negativos.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. Resolver la ecuación $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$

Solución:

Aplicando las propiedades de las potencias de la misma base:

$$5^3 5^x - \frac{5^x}{5} - 3120 = 0$$

Quitando denominadores y despejando:

$$\begin{aligned}
&625 \cdot 5^x - 5^x - 15600 = 0\\
&(625-1)5^x = 15600\\
&5^x = \frac{15600}{624} = 25
\end{aligned}$$

y, por consiguiente, $x = 2$.

♠♠♠♠

2.12. Inecuaciones.

Una inecuación es una desigualdad que se satisface solamente para algunos valores de las incógnitas que son las soluciones de la inecuación. Ejemplos de inecuaciones son:

$$3x + 5 \geq x\,; \qquad 3x^2 - 5x + 6 < 0\,; \qquad \frac{x-4}{x+2} \leq 5$$

Una inecuación puede transformarse en otra equivalente casi con las mismas reglas que una ecuación. Es decir, pueden cambiarse sumandos de uno a otro miembro cambiándoles el signo y pueden multiplicarse ambos miembros de la desigualdad por el mismo número positivo.

Únicamente hay que tener en cuenta que si se multiplican o dividen los dos miembros por el mismo número negativo, hay que cambiar el sentido de la desigualdad. Por ejemplo:

$$5x < 10 \quad\Longrightarrow\quad x < \frac{10}{5} \quad\Longrightarrow\quad x < 2 \qquad\qquad \text{sin embargo}$$

$$-5x < 10 \quad\Longrightarrow\quad x > \frac{10}{-5} \quad\Longrightarrow\quad x > -2$$

Así, una inecuación de primer grado puede resolverse de forma prácticamente igual que una ecuación. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 13. Resolver la inecuación:

$$\frac{2(x-3)}{5} - x \leq \frac{x}{2} + \frac{3(x-2)}{10}$$

Solución:

Aplicamos el mismo procedimiento que para resolver una ecuación de primer grado. Si debemos multiplicar o dividir por un número negativo, cambiaremos el sentido de la desigualdad:

$$\frac{10 \cdot 2(x-3)}{5} - 10 \cdot x \leq \frac{10 \cdot x}{2} + \frac{10 \cdot 3(x-2)}{10}$$

$$4(x-3) - 10x \leq 5x + 3(x-2)$$

$$4x - 12 - 10x \leq 5x + 3x - 6$$

$$-6x - 12 \leq 8x - 6$$

$$-6x - 8x \leq -6 + 12$$

$$-14x \leq 6$$

$$x \geq \frac{6}{-14} \qquad \text{o bien} \qquad x \geq -\frac{3}{7}$$

La solución puede expresarse también como el intervalo $\left[-\frac{3}{7}, \infty\right)$.

♠♠♠♠

De forma general, para resolver una inecuación de cualquiera de las formas

$$P(x) < 0\,; \qquad P(x) \leq 0\,; \qquad P(x) > 0\,; \qquad P(x) \geq 0$$

se procede de la forma siguiente:

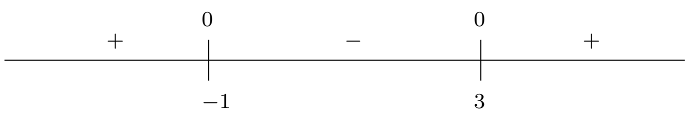
- ◇ Se calculan las raíces del polinomio $P(x)$.
- ◇ Las raíces obtenidas en el apartado anterior dividen la recta real en varios intervalos. Se calcula el signo del polinomio en cada uno de los intervalos.
- ◇ La solución está formada por los intervalos que cumplen la inecuación.

Para ver si el polinomio toma valores positivos o negativos en un intervalo basta probar con un número del intervalo. Además debe tenerse en cuenta que en las raíces simples (o de multiplicidad impar) el polinomio cambia de signo y en las raíces dobles (o de multiplicidad par) el polinomio no cambia de signo. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 14. Resolver la inecuación $x^2 - 2x - 3 > 0$

Solución:

- ◇ Las raíces del polinomio son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$. Son raíces simples.
- ◇ Estudiamos el signo del polinomio. Tenemos el siguiente esquema de signos:



- ◇ Como buscamos los intervalos en los que la función es positiva, la solución es:

$$(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 15. Resolver la inecuación $x^3 - x^2 - 8x + 12 \leq 0$

Solución:

◇ Para calcular las raíces, descomponemos en factores el polinomio buscando sus raíces enteras:

	1	-1	-8	12
2		2	2	-12
	1	1	-6	0

y tenemos una primera factorización $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x^2+x-6)$.
Las raíces de $x^2 + x - 6$ son 2 y -3. Por consiguiente, tenemos que:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3)$$

Las raíces del polinomio son $x_1 = 2$ (doble) y $x_2 = -3$.

◇ El signo del polinomio responde al siguiente esquema:

	-3		2	
$-$	0	$+$	0	$+$

Obsérvese que en $x = 2$ que es una raíz doble, el polinomio no cambia de signo.

◇ La solución de la inecuación propuesta es el conjunto $(-\infty, -3] \cup \{2\}$

♠♠♠♠

Otro tipo de inecuaciones importantes son las de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0\,; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0\,; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0\,; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Este problema se reduce al caso anterior si tenemos en cuenta que el signo de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es igual que el de $P(x)Q(x)$. Únicamente hay que tener en cuenta que en las raíces del denominador no existe la fracción y, por consiguiente, no pueden ser soluciones. Veámoslo con un ejemplo.

Ejercicio 16. Resolver la inecuación:

$$\frac{4-x^2}{x+1} \geq 0$$

Solución: Consideremos la inecuación

Las raíces del numerador son 2, -2; para estos valores de x la fracción es igual a cero. La raíz del denominador es -1; para este valor de x la fracción no existe. Calculemos el signo del polinomio:

	-2		-1		2	
$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

Hemos indicado con el símbolo $\nexists$ (no existe) la raíz del denominador $x = -1$. Del diagrama de signos se desprende que la solución de la inecuación es $(-\infty, -2] \cup (-1, 2]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 17. Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x} \leq 2$$

Solución:

Las raíces del numerador son $x = 1$ y $x = 2$. La raíz del denominador es $x = 0$. El esquema de signos es:

	0		1		2	
$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

La solución es $(-\infty, 0) \cup [1, 2]$.

♠♠♠♠

Tema 3

Trigonometría

3.1. Ángulos

Hasta ahora se han considerado los ángulos como la porción del plano comprendida entre dos semirrectas con el origen común. De esta manera, la medida de un ángulo está comprendida entre 0 y 360 grados. En este capítulo, un ángulo va a ser también considerado como la medida de un giro. Así, los ángulos podrán ser mayores de una vuelta (360°) y podrán tener dos sentidos: contrario al movimiento del reloj al que asignaremos signo positivo, o según el movimiento del reloj al que asignaremos ángulos negativos.

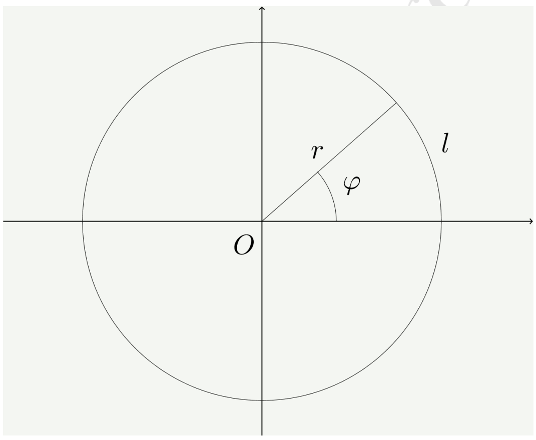


Figura 3.1: Medida de un ángulo en radianes

Representaremos los ángulos sobre una circunferencia centrada en el origen de coordenadas tomando como origen de ángulos el eje OX. Además de los grados sexagesimales, utilizaremos como unidad para medir ángulos el radián. La medida de un ángulo en radianes es igual a la longitud del arco dividida por el radio:

$$\varphi = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{radio}} = \frac{l}{r}$$

Como el arco de circunferencia correspondiente a una vuelta mide $2\pi r$, el ángulo correspondiente (360°) mide $2\pi r/r = 2\pi$ radianes. El ángulo llano (180°) mide π radianes y el ángulo recto $\pi/2$. Para pasar de grados a radianes se multiplica por $\pi/180$ y para pasar de radianes a grados por el inverso de este número $180/\pi$. Un radián es aproximadamente 57,2958°.

Algunos cálculos se simplifican utilizando el radián como medida de ángulos. Por ejemplo la longitud de un arco de circunferencia es $l = r\varphi$ y el área de un sector circular es $S = \frac{1}{2}r^2\varphi$.

Ángulos inscritos en una circunferencia. Se llaman así los ángulos que tienen su vértice sobre una circunferencia y sus lados son secantes de ella. Los ángulos inscritos tienen las siguientes propiedades:

- El ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.
- Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.
- Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.

3.2. Razones trigonométricas de ángulos agudos

En un triángulo rectángulo, llamemos a a la hipotenusa y b y c a los catetos; A será el ángulo recto y B y C los ángulos agudos tal como se representa en la figura: B es el ángulo opuesto al cateto b y C es el ángulo opuesto al cateto c.

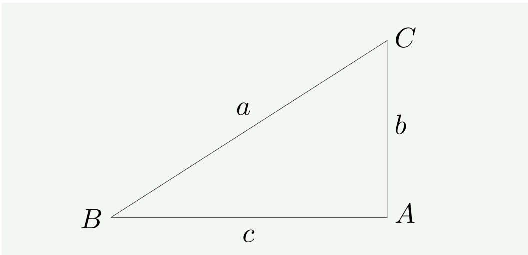


Figura 3.2: Triángulo rectángulo

Entre los elementos del triángulo se cumple una relación entre los lados, el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

y una relación entre los ángulos:

$$B + C = 90^\circ \qquad (B \text{ y } C \text{ complementarios})$$

Vamos a definir unas funciones que relacionan los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Estas funciones son las siguientes:

$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

Para el ángulo C, estas funciones serían:

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

Las recíprocas de estas funciones se llaman cosecante, secante y cotangente:

$$\operatorname{cosec} B = \frac{1}{\operatorname{sen} B} \qquad \sec B = \frac{1}{\cos B} \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$$

Cuando se utilizan para resolver triángulos rectángulos, las fórmulas anteriores pueden recordarse de esta manera:

$$\text{un cateto} = \text{hipotenusa} \times \begin{cases} \text{seno del ángulo opuesto} \\ \text{coseno del ángulo comprendido} \end{cases}$$

$$\text{un cateto} \;=\; \text{otro cateto} \;\times \begin{cases} \text{tangente del ángulo opuesto (al 1º)} \\ \text{cotangente del ángulo comprendido (por el 1º)} \end{cases}$$

3.3. La escuadra y el cartabón

La escuadra es un triángulo rectángulo isósceles. Sus ángulos agudos son ambos iguales a 45. El cartabón es un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son iguales a 30 y 60.

La escuadra puede considerarse como el triángulo rectángulo que se forma cuando un cuadrado se divide en dos triángulos mediante la diagonal. El cartabón es el triángulo resultante de dividir un triángulo equilátero en dos partes iguales mediante una altura. Las proporciones entre las longitudes de los lados de estos triángulos aparecen reflejadas en la figura adjunta.

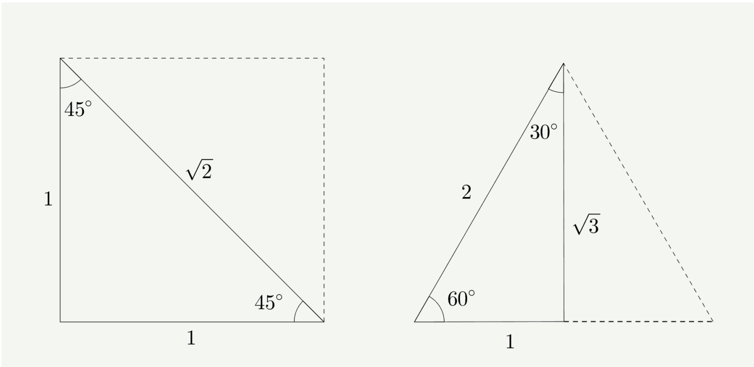


Figura 3.3: La escuadra y el cartabón

De la figura se deducen los siguientes valores para las razones trigonométricas de los ángulos de 30, 45 y 60.

	30	45	60
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

3.4. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

Representemos el ángulo φ sobre una circunferencia centrada en el origen y tomemos el eje de abscisas como origen de ángulos. A cada ángulo φ le corresponde un punto de la circunferencia de coordenadas $E(x, y)$ (extremo del arco). Las razones trigonométricas de φ se definen a partir de las coordenadas de

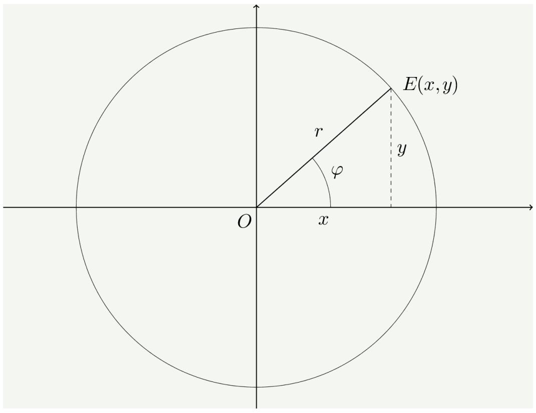


Figura 3.4: Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

este punto:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\text{ordenada de } E}{\text{radio}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{abscisa de } E}{\text{radio}} = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{ordenada de } E}{\text{abscisa de } E} = \frac{y}{x}$$

Si el radio de la circunferencia es igual a 1, el seno es la ordenada y el coseno la abscisa del extremo del arco.

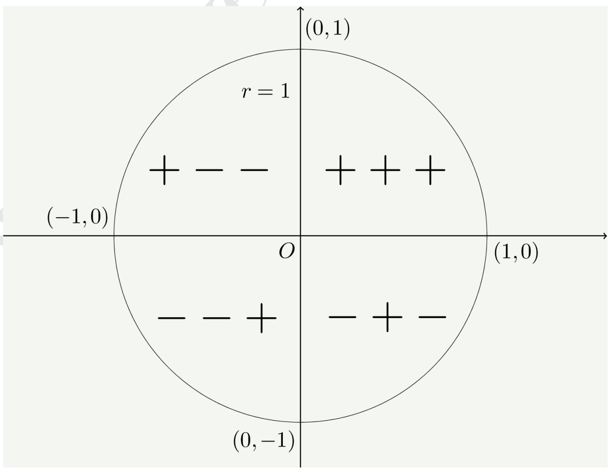


Figura 3.5: Signo de las razones trigonométricas

Puesto que el seno, coseno y tangente se han definido a partir de las coordenadas de un punto, pueden ser positivos o negativos dependiendo del cuadrante en que se encuentre el punto. En la figura 3.5 se han representado los signos de las tres funciones en cada cuadrante.

Los puntos de corte de la circunferencia con los ejes de coordenadas se corresponden con los ángulos de 0° (o 360°), 90°, 180° y 270°. La abscisa y la ordenada de estos puntos cuando la circunferencia tiene radio 1 son, respectivamente el coseno y el seno de esos ángulos. Estos valores se han señalado también en la figura.

Conocida una de las razones trigonométricas de un ángulo, pueden calcularse las demás (salvo el signo) por medio de las siguientes relaciones:

- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} x$$

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

  Se obtiene de la igualdad anterior dividiendo por $\cos^2 x$

- $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

  Igual que la anterior pero dividiendo por $\operatorname{sen}^2 x$

La primera de las fórmulas relaciona las tres funciones de modo que conocidas dos de ellas puede calcularse la tercera. Las siguientes relacionan seno con coseno, coseno con tangente y seno con cotangente.

3.5. Resolución de triángulos

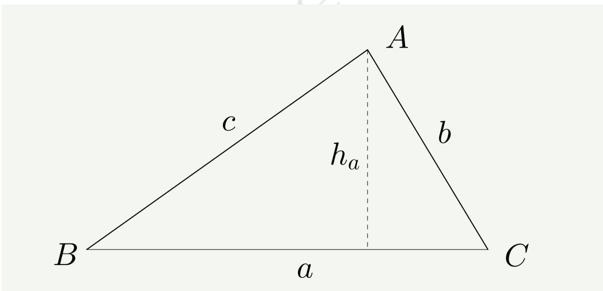


Figura 3.6: Teorema del seno

Un triángulo tiene tres lados a, b y c, y tres ángulos A, B y C. Conocidos tres de estos elementos que no sean los ángulos, pueden calcularse los otros tres. Para ello son útiles los siguientes teoremas:

Teorema 1 (Teorema del seno)**.** *En un triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

La constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Demostración. En la figura anterior, la altura h_a divide el triángulo ABC en dos triángulos rectángulos. De aquí que:

$$h_a = b \ \operatorname{sen} C = c \ \operatorname{sen} B \quad \Longrightarrow \quad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

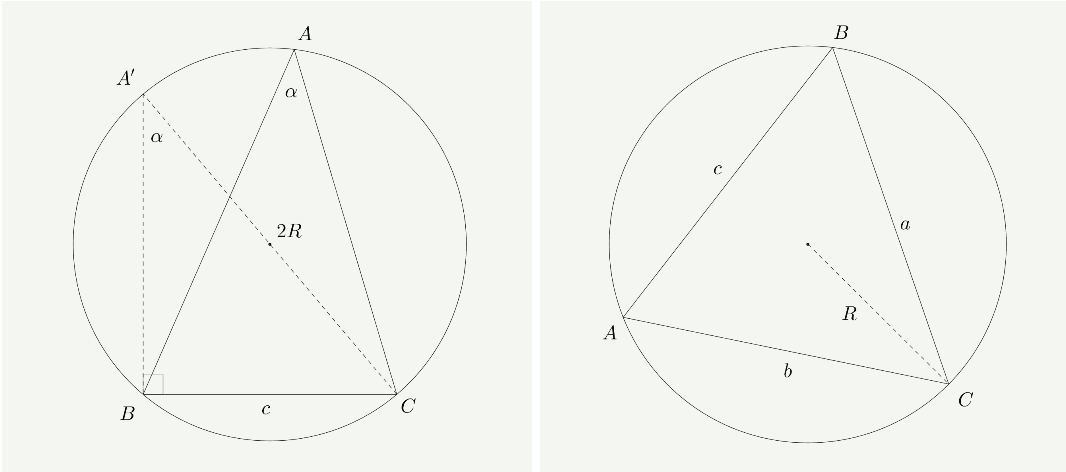


Figura 3.7: Angulos inscritos y teorema del seno

También puede demostrarse el teorema del seno a partir de la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia:

Sea el ángulo α inscrito en una circunferencia que abarca un arco con una cuerda c (ver figura 3.7). Construimos otro ángulo sobre el mismo arco en el que uno de sus lados es un diámetro de la circunferencia. Este ángulo también valdrá α puesto que está inscrito en el mismo arco que el anterior. Pero, dado que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, el triángulo $A'BC$ es rectángulo y

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{2R}$$

es decir, el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual al cociente de la cuerda y el diámetro.

A partir del resultado anterior deducimos (figura 3.7 derecha):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}A &= \frac{a}{2R} \\ \operatorname{sen}B &= \frac{b}{2R} \\ \operatorname{sen}C &= \frac{c}{2R} \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \quad 2R = \frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

es decir, los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la razón de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo. □

Teorema 2 (Teorema del coseno)**.** *Un lado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

El teorema del coseno permite calcular también los ángulos cuando se conocen los lados:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

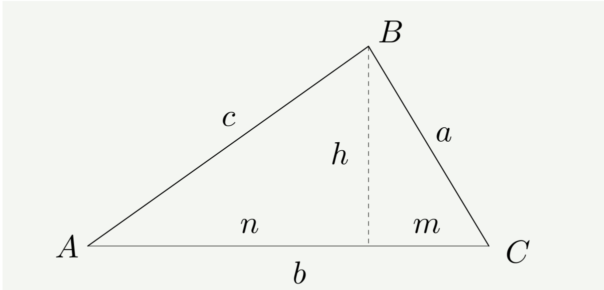


Figura 3.8: Teorema del coseno

Demostración. De la figura 3.8 se deduce:

$$\begin{aligned} a^2 &= m^2 + h^2 \\ &= (b-n)^2 + h^2 \\ &= b^2 + n^2 - 2bn + h^2 && \text{(y puesto que } n^2 + h^2 = c^2\text{)} \\ &= b^2 + c^2 - 2bn && \text{(y como } n = c\cos A\text{)} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

□

3.6. Área de un triángulo

Como es sabido, el área de un triángulo es igual a la mitad de la base por la altura. Como base se puede tomar cualquiera de los lados de forma que, por ejemplo:

$$S = \frac{1}{2}\, a\, h_a$$

En la figura 3.6, $h_a = b \operatorname{sen} C$ de modo que:

$$S = \frac{1}{2}\, a\, b\, \operatorname{sen} C$$

es decir, el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

Si se conocen los tres lados, puede calcularse el área por la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (p = \text{semiperímetro})$$

Esta fórmula puede demostrarse a partir del teorema del coseno como se verá más adelante.

De la fórmula de Herón podemos calcular la longitud de las alturas del triángulo. En efecto, de:

$$S = \frac{1}{2}\, a\, h_a \qquad \text{y} \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

se deduce que:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e igualmente se obtendría:

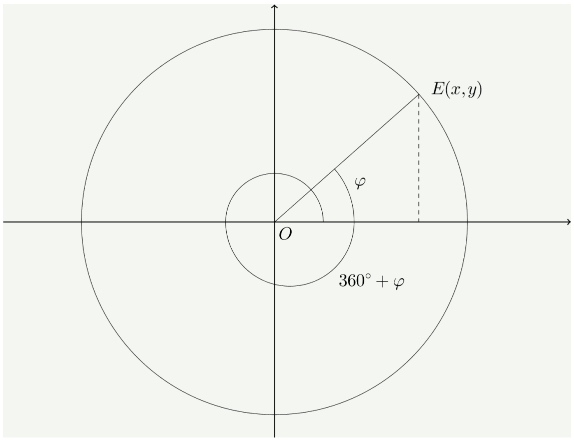
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3.7. Reducción al primer cuadrante

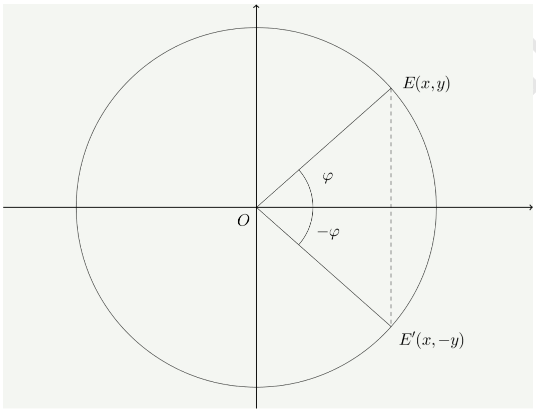
Por la simetría de la circunferencia, basta conocer las razones trigonométricas de los ángulos del primer cuadrante para poder calcular las de todos los ángulos. Las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de cualquier ángulo con los del primer cuadrante son las siguientes:

- ⋄ Ángulos que difieren en un número entero de vueltas.



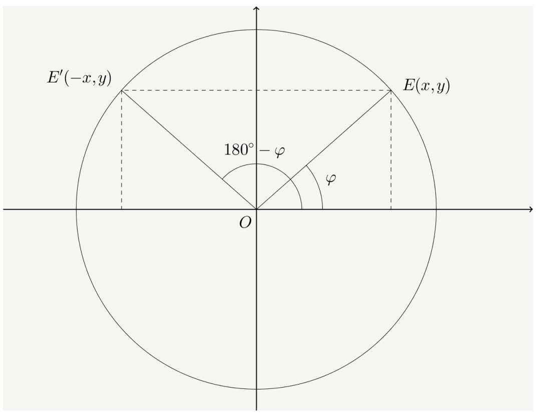
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(360°k+\varphi) &= \operatorname{sen}\varphi \\ \cos(360°k+\varphi) &= \cos\varphi \\ \operatorname{tg}(360°k+\varphi) &= \operatorname{tg}\varphi \end{aligned}$$

- ⋄ Ángulos negativos.



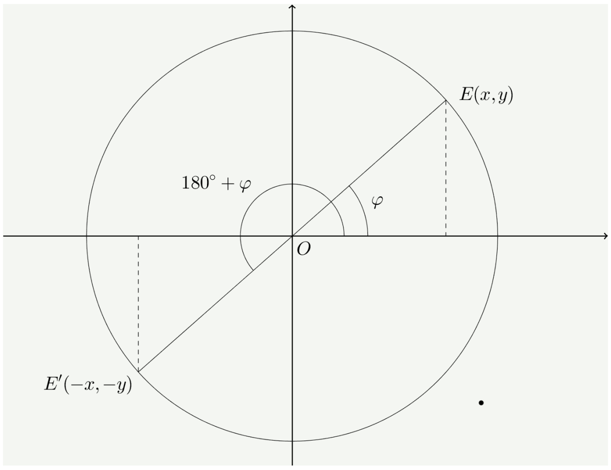
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\varphi) &= -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos(-\varphi) &= \cos\varphi \\ \operatorname{tg}(-\varphi) &= -\operatorname{tg}\varphi \end{aligned}$$

- ⋄ Ángulos suplementarios.



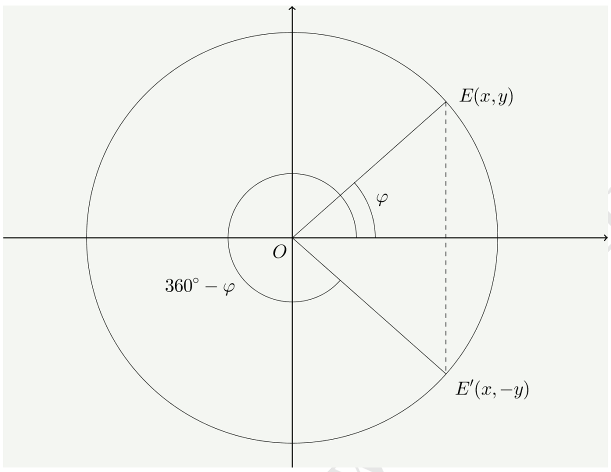
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180°-\varphi) &= \operatorname{sen}\varphi \\ \cos(180°-\varphi) &= -\cos\varphi \\ \operatorname{tg}(180°-\varphi) &= -\operatorname{tg}\varphi \end{aligned}$$

◇ Ángulos que difieren en 180º.



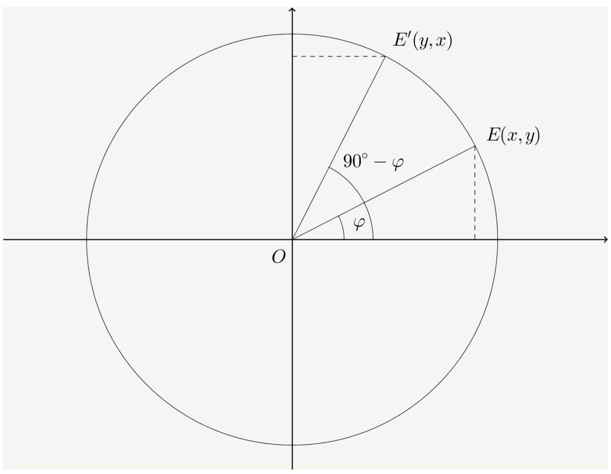
$$\operatorname{sen}(180^\circ + \varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$$
$$\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos\varphi$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi$$

◇ Ángulos que suman 360º



$$\operatorname{sen}(360^\circ - \varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$$
$$\cos(360^\circ - \varphi) = \cos\varphi$$
$$\operatorname{tg}(360^\circ - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$$

◇ Ángulos complementarios.



$$\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi$$
$$\cos(90^\circ - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = \operatorname{cotg}\varphi$$

3.8. Suma de ángulos

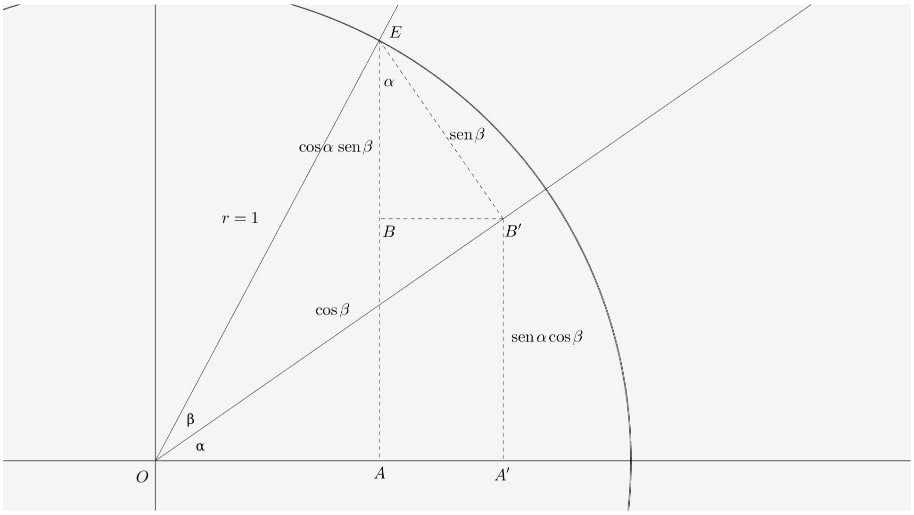


Figura 3.9: Suma de ángulos

Las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos α y β se relacionan con las razones trigonométricas de los sumandos por las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

De la figura (ver figura 3.9) se deduce que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= AE\\ &= AB + BE\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= OA\\ &= OA' - AA'\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

La fórmula de la tangente se obtiene el seno entre el coseno:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\\ &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\end{aligned}$$

Las fórmulas para la diferencia de ángulos podemos obtenerlas sustituyendo en las fórmulas de la suma β por $-\beta$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}[\alpha+(-\beta)]\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

y de forma similar:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

3.9. Ángulo doble y ángulo mitad

Si en las fórmulas de la suma se hace $\beta = \alpha$ resulta para el ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

A partir de estas fórmulas podemos deducir otras para el ángulo mitad.Puesto que:

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$$

Sumado y restando estas dos ecuaciones resulta:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \qquad \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Estas fórmulas se utilizarán posteriormente en el tema de cálculo integral. Haciendo el cambio $\alpha = \frac{A}{2}$ (y por tanto $2\alpha = A$) obtenemos las siguientes fórmulas para el ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

Las raíces deberán tomarse con signo más o menos dependiendo del cuadrante en que se encuentre el ángulo mitad.

3.10. Fórmulas de transformación en producto

Sumando y restando las fórmulas de la suma y de la diferencia de ángulos se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}\right.$$

Y de la misma forma:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta\end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}\right.$$

llamando $\alpha+\beta = A$ y $\alpha-\beta = B$ (y, por tanto, $\alpha = \frac{A+B}{2}$ y $\beta = \frac{A-B}{2}$), estas fórmulas se pueden escribir:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

3.11. Funciones circulares.

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \operatorname{tg} x$ así como sus recíprocas cosecante, secante y cotangente, tienen la particularidad de que son periódicas de período 2π, es decir toman valores iguales cada 2π radianes. La función tangente tiene un período más pequeño de π radianes.

Como se ve (figura 7.7), las gráficas de las funciones seno y coseno son iguales pero desfasadas en $\frac{\pi}{2}$. La función tangente tiene asíntotas $x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ para $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

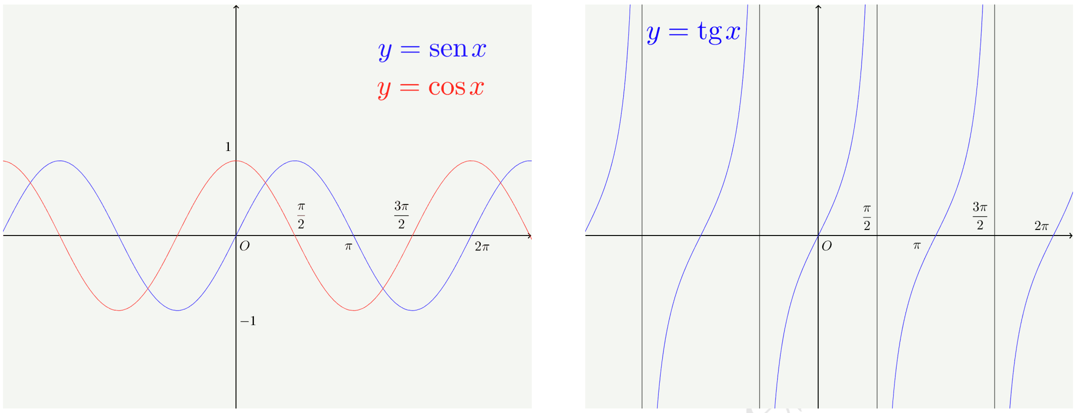


Figura 3.10: Funciones circulares

Las inversas de estas funciones se llaman arcoseno, arcocoseno y arcotangente. Estas funciones se definen de la siguiente manera:

- ◇ $\operatorname{arsen} x$ es el ángulo (en radianes) comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno vale x.
- ◇ $\arccos x$ es el ángulo comprendido entre 0 y π cuyo coseno vale x.
- ◇ $\operatorname{artg} x$ es el ángulo comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuya tangente vale x.

3.12. La fórmula de Herón

Anteriormente ya vimos la fórmula de Herón que da el área de un triángulo cuando se conocen los tres lados:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Ahora demostraremos esta fórmula. Hemos visto que el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2}\, bc \ \operatorname{sen} A$$

Por otra parte, por el teorema del coseno sabemos que:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

La demostración se basa en obtener el seno de A de la segunda de estas fórmulas para sustituirlo en la primera:

Puesto que

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A = (1+\cos A)(1-\cos A)$$

vamos a calcular los dos factores $1+\cos A$ y $1-\cos A$, a partir del teorema del coseno:

$$1+\cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

Como hemos llamado p al semiperímetro tenemos que $b+c+a = 2p$ y además:

$$b+c-a = b+c+a-2a = 2p-2a = 2(p-a)$$

con lo que tenemos que

$$1+\cos A=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}=\frac{2p\cdot 2(p-a)}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc} \tag{3.1}$$

De la misma forma obtenemos para $1-\cos A$:

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

En función de semiperímetro esto se puede escribir como:

$$1-\cos A=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}=\frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc} \tag{3.2}$$

Ya podemos obtener el seno de A:

$$\operatorname{sen}^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)=\frac{2p(p-a)}{bc}\cdot\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$$

con lo que:

$$\operatorname{sen} A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

y sustituyendo en la fórmula del área:

$$S=\frac{1}{2}\,bc\,\operatorname{sen} A=\frac{1}{2}\,bc\,\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

De las fórmulas 3.1 y 3.2 y teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

se obtienen las siguientes fórmulas para los ángulos de un triángulo cuando se conocen los lados:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p(p-a)}{(p-b)(p-c)}};\qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{2p(p-b)}{(p-a)(p-c)}};\qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{2p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$$

que se conocen como **fórmulas de Briggs**.

Tema 4

Geometría

4.1. Ecuación punto-pendiente y explícita de la recta.

En Geometría Analítica las rectas se representan mediante ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Los puntos de la recta son las soluciones de la ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$3x + 4y = 5$$

representa a una recta. Si queremos obtener puntos de esta recta, basta calcular soluciones de la ecuación. Dando un valor a una de las incógnitas y calculando el valor correspondiente de la otra obtenemos un punto. Por ejemplo, en la ecuación anterior, dando a x el valor -1 se obtiene para y:

$$x = -1 \quad \Longrightarrow \quad 3(-1) + 4y = 5 \; ; \qquad 4y = 8 \; ; \qquad y = 2$$

de modo que el punto $(-1, 2)$ es un punto de la recta dada.

Una ecuación de primer grado puede escribirse de muchas formas diferentes, con paréntesis, sin paréntesis, con denominadores, sin denominadores, etc. Dependiendo cómo se escriba la ecuación, sus coeficientes tienen un significado u otro como características de la recta. Seguidamente, veremos las formas más convenientes de escribir la ecuación de una recta.

Supongamos que una recta está definida por un punto $P(x_0, y_0)$ y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje de abscisas, es decir, por el ángulo α en la figura 4.1. La tangente de este ángulo se representa por la letra m y se llama **pendiente** de la recta.

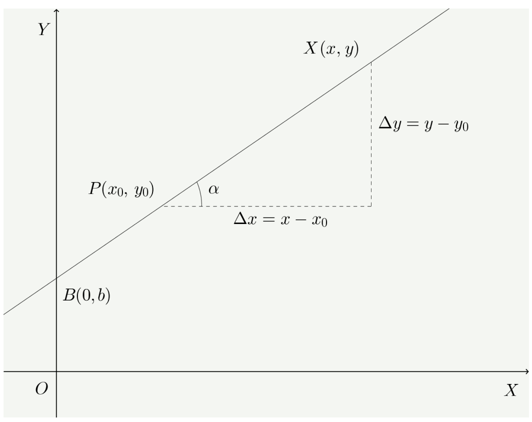


Figura 4.1: Ecuaciones de la recta punto-pendiente y explícita

Para que el punto $X(x, y)$ se encuentre sobre la recta debe cumplir que:

$$\operatorname{tg}\alpha = m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \Longrightarrow \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

Esta forma de escribir la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

se llama forma **punto-pendiente** de la ecuación de la recta. El significado de los coeficientes en este caso está claro: representan las coordenadas (x_0, y_0) de un punto de la recta y la pendiente m.

Si se toma como punto para definir la recta, el punto de corte con el eje de ordenada $B(0, b)$, la ecuación queda:

$$y - b = m(x - 0)$$

o bien

$$y = mx + b$$

que se llama **ecuación explícita** de la recta. En esta ecuación, el coeficiente de x es la pendiente, y el término independiente b representa la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas que recibe el nombre de **ordenada en el origen.**

Ejercicio 18. Calcular en las formas punto-pendiente y explícita la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 5)$ y $B(3, 1)$.

Solución:

Podemos calcular la pendiente de la recta como el cociente de las variaciones de y y de x entre los dos puntos conocidos de la recta (figura 4.2):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{3 - (-2)} = \frac{-4}{5}$$

Como punto para definir la recta podemos tomar cualquiera de los dos, por ejemplo el punto A. La ecuación punto-pendiente

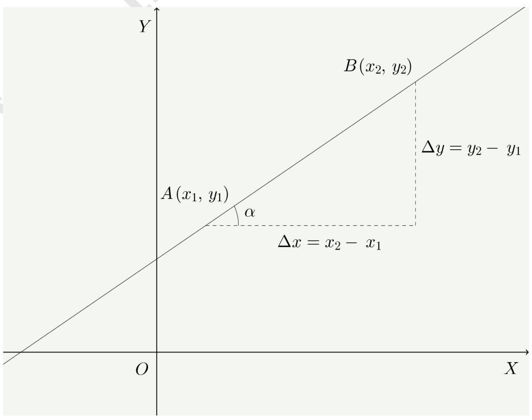


Figura 4.2: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

es:

$$y - 5 = -\frac{4}{5}\,(x + 2)$$

La ecuación explícita la obtenemos despejando y:

$$y = 5 - \frac{4}{5}\,x - \frac{8}{5} \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{4}{5}\,x + \frac{17}{5}$$

♠♠♠♠

4.2. Ecuación canónica o segmentaria.

Vamos a suponer ahora que la recta está dada por los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ en que la recta corta a los ejes de coordenadas (figura 4.3).

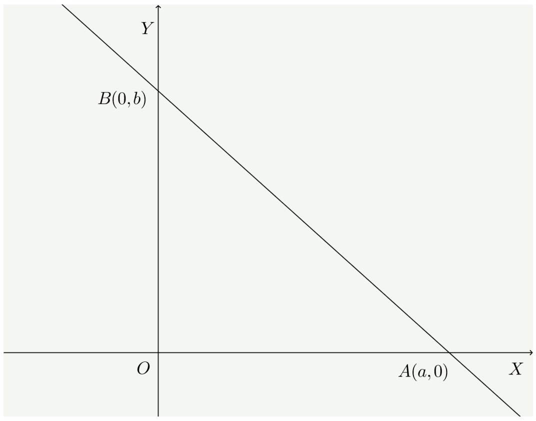


Figura 4.3: Ecuación segmentaria de la recta

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$$

Puesto que la ordenada en el origen de la recta es b, su ecuación explícita es:

$$y = -\frac{b}{a}\,x + b \quad \Longrightarrow \quad \text{(quitando denominadores)} \quad bx + ay = ab$$

y dividiendo por ab los dos miembros resulta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta es la **ecuación segmentaria o canónica** de la recta. Los coeficientes a y b de la ecuación son, respectivamente, **la abscisa y la ordenada en el origen**, es decir, la abscisa y la ordenada de los puntos de corte con los ejes.

Ejercicio 19. Calcular la ecuación segmentaria de la recta $3x + 4y = 24$.

Solución:

Resolveremos el problema por dos procedimientos:

◇ Calculamos las intersecciones e la recta con los ejes de coordenadas. Para calcular la intersección con el eje de abscisas hacemos $y = 0$ y para calcular la intersección con el eje de ordenadas hacemos $x = 0$:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(8, 0) \qquad\qquad \begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B(0, 6)$$

Hemos hallado la abscisa en el origen ($a = 8$) y la ordenada en el origen ($b = 6$). La ecuación de la recta en forma segmentaria es:

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

◇ Dividiendo los dos miembros de la ecuación por 24:

$$\frac{3x}{24} + \frac{4y}{24} = \frac{24}{24}$$

Pasando dividiendo al denominador los coeficientes que aparecen en el numerador multiplicando:

$$\frac{x}{\frac{24}{3}} + \frac{y}{\frac{24}{6}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

♠♠♠♠

4.3. Ecuación general o implícita.

No todas las rectas tienen una ecuación que se pueda escribir en una de las formas vistas hasta ahora. Por ejemplo, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas. Las rectas paralelas al eje de ordenadas forman un ángulo de 90° con el eje de abscisas y, por consiguiente, no tienen pendiente, puesto que la tangente de 90° no existe. A veces se dice que estas rectas tienen tangente infinita.

Para que la ecuación de una recta pueda escribirse en forma segmentaria, es preciso que la recta corte a los dos ejes en puntos distintos del origen. Por tanto, no podrán escribirse en forma segmentaria ni las rectas paralelas a cualquiera de los dos ejes ni las rectas que pasan por el origen.

Sin embargo, todas las rectas pueden expresarse mediante ecuaciones del tipo:

$$Ax + By + C = 0$$

Esta forma de escribir la ecuación de primer grado se llama **general o implícita** y, como hemos dicho, todas las rectas tienen una ecuación que se puede escribir de esta manera. El problema es que es más difícil encontrar un significado par sus coeficientes A, B y C.

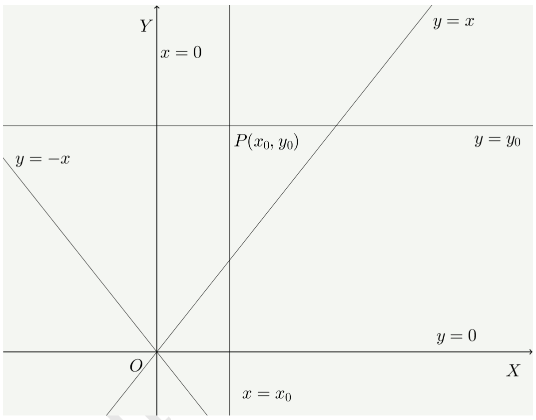


Figura 4.4: Casos particulares de la ecuación de la recta

Cuando alguno de los coeficientes de la ecuación es cero, nos encontramos con los siguientes casos particulares:

- Si $A = 0$ en la ecuación falta la incógnita x. La ecuación se suele escribir en la forma $y = y_0$ y se trata de rectas paralelas al eje de abscisas. En particular, la ecuación del eje X es $y = 0$.

- Si $B = 0$ en la ecuación falta la incógnita y. En este caso se trata de rectas paralelas al eje de ordenadas que se suelen escribir en la forma $x = x_0$. La ecuación del eje de ordenadas es $x = 0$.

- Si $C = 0$ la recta correspondiente pasa por el origen puesto que $(0, 0)$ es una solución de la ecuación. En particular, la recta $y = x$ se llama bisectriz del primer cuadrante y $y = -x$ bisectriz del segundo cuadrante.

Ejercicio 20. Calcular las ecuaciones de las paralelas a los ejes por el punto $P(1, 3)$

Solución:

La paralela al eje OX tiene de ecuación $y = 3$. La paralela al eje OY tiene de ecuación $x = 1$.

♠♠♠♠

Ejercicio 21. Calcular el punto de intersección de la recta $2x + 5y - 7 = 0$ con la bisectriz del primer cuadrante.

Solución:

Para calcular la intersección de dos rectas hay que hallar la solución del sistema formado por sus ecuaciones. En este caso, el sistema es:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 7 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

sistema que tiene por solución el punto $P(1, 1)$.

♠♠♠♠

4.4. Posición relativa de dos rectas.

Dos rectas o bien **se cortan o son paralelas**. Cuando dos rectas son paralelas forman el mismo ángulo con el eje de abscisas y, por consiguiente, tienen la misma pendiente (ver figura 4.5).

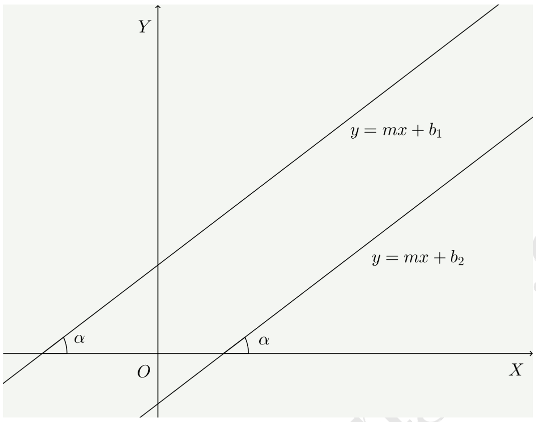


Figura 4.5: Rectas paralelas

Si las ecuaciones de las dos rectas están escritas en forma explícita o punto-pendiente podemos saber si son paralelas, simplemente comprobando si tienen o no la misma pendiente.

En el caso de que una recta esté escrita en forma implícita $Ax + By + C = 0$, podemos obtener su pendiente despejando la incógnita y:

$$Ax + By + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B} \quad \Longrightarrow \quad m = -\frac{A}{B}$$

Por tanto, si las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ son paralelas, deben tener la misma pendiente y, por consiguiente:

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Esta es la condición de paralelismo de dos rectas cuando sus ecuaciones están escritas en forma implícita. Si además sucede que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones (una de ellas es igual a la otra multiplicada por un número). Las dos rectas tienen los mismos puntos y son, por tanto, coincidentes.

Ejercicio 22. Calcular la ecuación de la paralela a la recta $y = 2x - 5$ que pasa por el punto $P(3, -7)$.

Solución:

Si es paralela, debe tener la misma pendiente $m = 2$. Como además pasa por el punto $P(3, -7)$, su ecuación es:

$$y + 7 = 2\,(x - 3)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 23. Calcular la ecuación de la paralela a la recta $3x - 5y + 8 = 0$ por el punto $A(1, 7)$.

Solución:

Si la ecuación está dada en forma implícita podemos utilizar otro procedimiento (aunque podríamos calcular la pendiente de la recta dada y proceder como en el problema anterior). Puesto que los coeficientes A y B de la recta y su paralela son proporcionales, podemos suponer que son los mismos y las dos ecuaciones difieren simplemente en el coeficiente C. La recta que buscamos es:

$$3x - 5y + C = 0$$

Como la recta pasa por $A(1, 7)$ estos números son solución de la ecuación. Por tanto:

$$3 \cdot 1 - 5 \cdot 7 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 35 - 3 = 32$$

La ecuación de la paralela es $3x - 5y + 32 = 0$.

♠♠♠♠

4.5. Ángulo de dos rectas

Se llama ángulo de dos rectas el menor de los ángulos que forman.

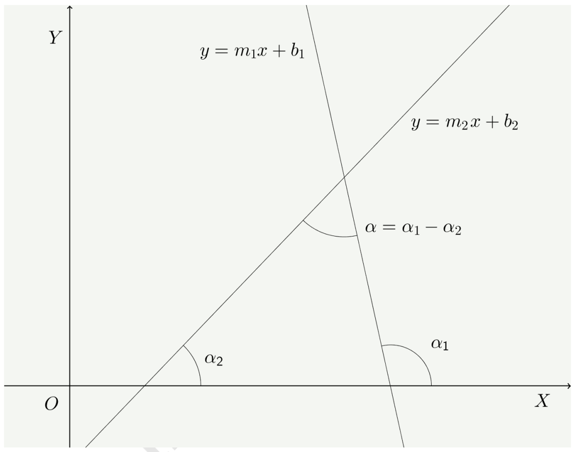


Figura 4.6: Angulo de dos rectas

Sean dos rectas r_1 y r_2 cuyas ecuaciones en forma explícita son $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$. En la figura 4.6 vemos que el ángulo α que forman las dos rectas es:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

Por consiguiente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Si queremos obtener el ángulo agudo que forman las dos rectas, deberemos tomar el valor absoluto de esta expresión. Tenemos entonces para el ángulo de dos rectas la siguiente fórmula:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Si las rectas son perpendiculares el denominador debe ser cero. La condición para que dos rectas sean perpendiculares es:

$$r_1 \perp r_2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + m_1 m_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Haciendo $\alpha = 0$ se obtiene la condición de paralelismo que ya conocemos:

$$r_1 \parallel r_2 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

Ejercicio 24. Calcular la ecuación de la recta perpendicular a $r: \ 3x - 5y + 1 = 0$ que pasa por $P(1, -2)$.

Solución:

La pendiente de la recta r es $m = \frac{3}{5}$. La pendiente de la perpendicular tiene que ser $m' = -\frac{5}{3}$. Puesto que la recta debe pasar por $P(1, -2)$ su ecuación es:

$$y + 2 = -\frac{5}{3}(x - 1)$$

♠♠♠♠

4.6. Distancias

◇ **Distancia entre dos puntos.**

De la figura 4.7 y del teorema de Pitágoras se desprende que:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

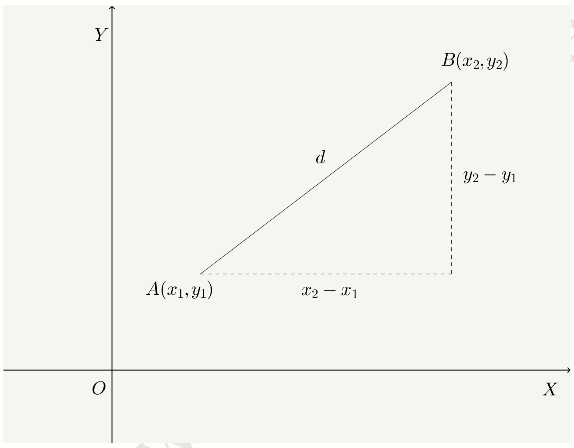


Figura 4.7: Distancia entre dos puntos

◇ **Distancia desde el origen a una recta.**

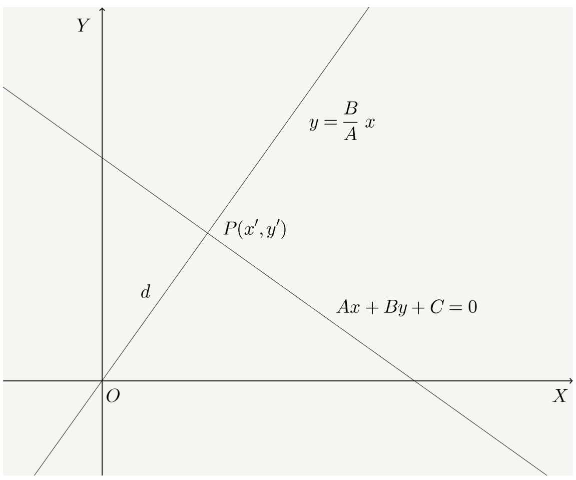


Figura 4.8: Distancia del origen a una recta

Sea la recta $r: \ Ax + By + C = 0$ (ver figura 4.8). La ecuación de la perpendicular a r por el origen es:

$$y = \frac{B}{A}\,x$$

La intersección de esta recta con r es el punto $P(x', y')$. Las coordenadas de este punto se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ y = \dfrac{B}{A}\,x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad Ax + \frac{B^2}{A}\,x + C = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A^2x + B^2x + AC = 0$$

Despejando:

$$(A^2 + B^2)x + AC = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{-AC}{A^2 + B^2}$$

Las coordenadas del punto P son:

$$x' = \frac{-AC}{A^2 + B^2} \qquad y' = \frac{-BC}{A^2 + B^2}$$

La distancia del origen a P es:

$$d = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\frac{A^2C^2 + B^2C^2}{(A^2 + B^2)^2}} = \sqrt{\frac{C^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

◇ **Distancia de un punto a una recta.**

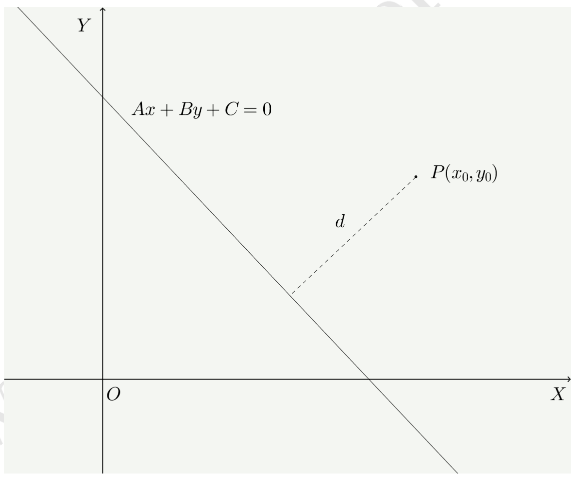


Figura 4.9: Distancia de un punto a una recta

Sea el punto $P(x_0, y_0)$ y la recta $r: \ Ax + By + C = 0$. Para calcular la distancia de P a r hacemos una traslación que lleve el punto P al origen:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

La recta trasladada tiene como ecuación:

$$A(x' + x_0) + B(y' + y_0) + C = 0 \qquad \text{o} \qquad Ax' + By' + Ax_0 + By_0 + C = 0$$

Aplicando ahora la fórmula obtenida para la distancia desde el origen a una recta se obtiene:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

fórmula que es fácil de recordar pues el numerador es el primer miembro de la ecuación implícita de la recta r sustituyendo, en lugar de las incógnitas, las coordenadas de P.

◇ **Distancia entre rectas paralelas.**

La distancia entre dos rectas paralelas puede calcularse tomando un punto cualquiera de una de ellas y calculando la distancia desde ese punto a la otra recta. También puede obtenerse como suma o diferencia de las distancias desde el origen (figura 4.10).

Si las ecuaciones de las rectas son $r_1: \; Ax+By+C=0$ y $r_2: \; Ax+By+C'=0$, su distancia es:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

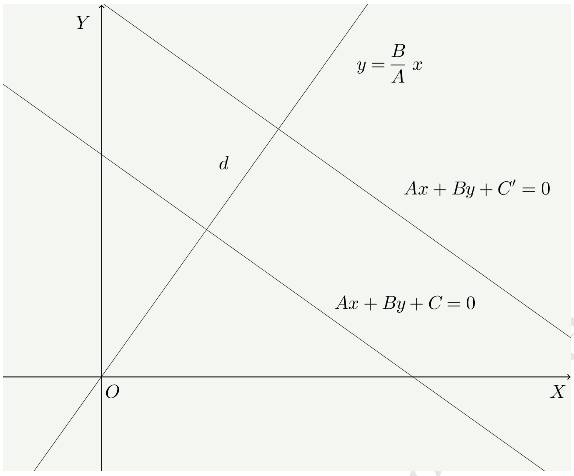


Figura 4.10: Distancia entre dos rectas paralelas

4.7. Mediatriz y bisectriz

La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio. También puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

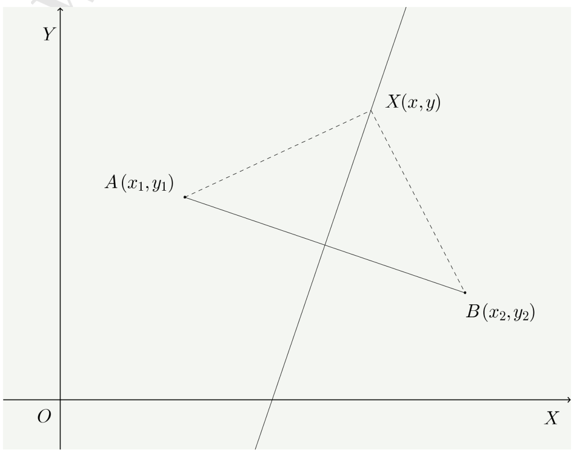


Figura 4.11: Mediatriz de un segmento

Sea el segmento determinado por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ (ver figura 4.11). Sea $X(x, y)$ un punto cualquiera de la mediatriz de AB. Se cumple que:

$$d(X,A) = d(X,B)$$
$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \qquad \text{elevando al cuadrado}$$
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

Esta es la ecuación de la mediatriz de AB. Simplificando los términos de segundo grado queda:

$$2x(x_2-x_1)+2y(y_2-y_1)+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0$$

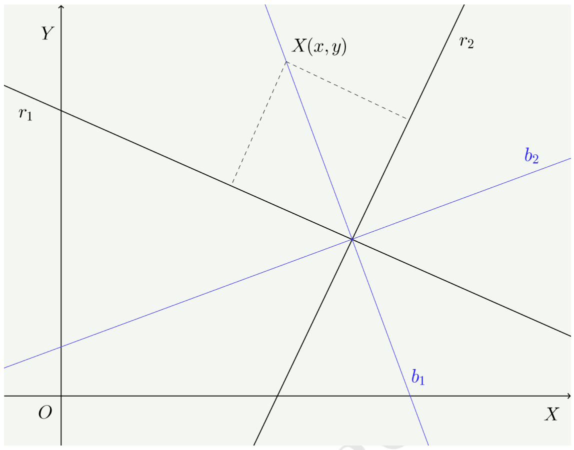


Figura 4.12: Bisectriz de dos rectas

La bisectriz de dos rectas que se cortan es el conjunto de puntos que equidistan de las dos rectas.

Sean las rectas $r_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ y $r_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$ (ver figura 4.12). Si $X(x,y)$ es un punto de la bisectriz, se cumple que:

$$d(X,r_1) = d(X,r_2)$$
$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$
$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Como vemos, hay dos bisectrices b_1 y b_2 perpendiculares entre sí.

4.8. Vectores

Un vector es un segmento orientado. En un vector podemos distinguir su **módulo o longitud**, su **dirección** (la de la recta que lo contiene) y su **sentido** (hay dos sentidos posibles para cada dirección).

Cuando al unir los orígenes y los extremos de dos segmentos orientados, la figura que resulte sea un paralelogramo, consideraremos que los dos vectores son iguales, es decir, los dos segmentos son representaciones del mismo vector. Esto quiere decir que cualquier vector lo podemos representar con el origen en el punto que queramos.

El **opuesto** de un vector es el vector que tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario.

Definimos dos operaciones con vectores (figura 4.14):

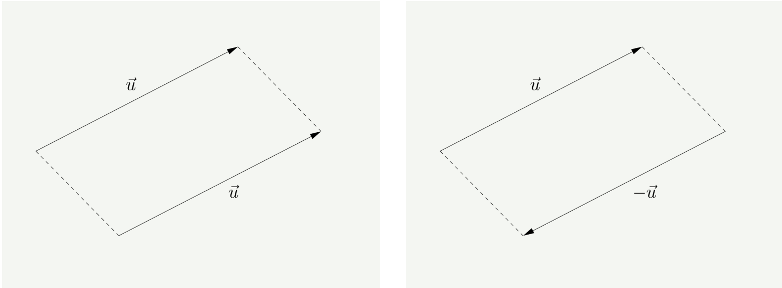


Figura 4.13: Vectores iguales y opuestos

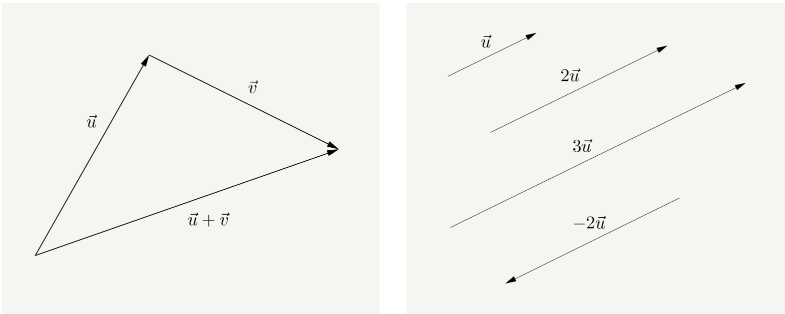


Figura 4.14: Operaciones con vectores

- ◇ La suma de dos vectores se obtiene representando uno a continuación del otro. El vector suma tiene como origen el origen del primer vector y como extremo, el extremo del segundo vector. La diferencia de dos vectores se obtiene sumando al primero el opuesto del segundo.
- ◇ Si se multiplica un vector por un número, el vector resultante tiene la misma dirección, el módulo queda multiplicado por el número (positivo) y el sentido es igual u opuesto según que se multiplique por un número positivo o negativo.

Debemos destacar que cuando se multiplica un vector por un número no cambia la dirección del vector. También es cierto que si dos vectores tienen la misma dirección, uno de ellos es igual al otro multiplicado por un número:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = t\vec{v}$$

Una base del conjunto de vectores libres del plano está formada por dos vectores $\{\vec{i},\vec{j}\}$ no alineados. Todo vector puede descomponerse como suma de dos vectores en las direcciones de $\vec{i}$ y de $\vec{j}$ (ver figura 4.15):

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Los números v_x y v_y se llaman coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$. En lo sucesivo, representaremos los vectores por sus dos coordenadas entre paréntesis:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Cuando los vectores están dados por sus coordenadas, las operaciones resultan muy sencillas:

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

$$t\,\vec{u} = t\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tu_x \\ tu_y \end{pmatrix}$$

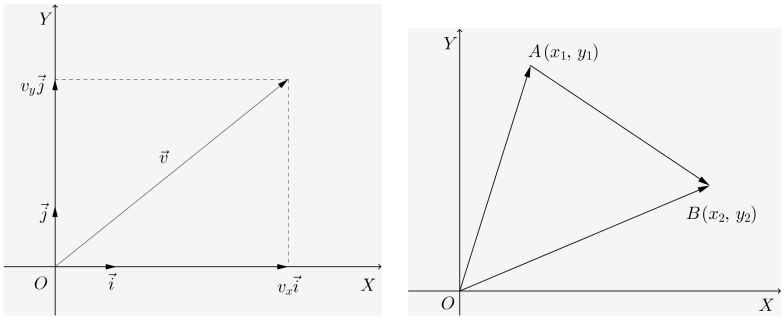


Figura 4.15: Coordenadas de un vector. Vector dado por su origen y extremo.

En lo que sigue utilizaremos vectores para indicar la posición de los puntos y las direcciones de las rectas. Dado un punto $P(x, y)$ se llama **vector de posición** del punto al vector $\overrightarrow{OP}$ que va del origen de coordenadas al punto. Las coordenadas de un punto coinciden con las de su vector de posición.

Vector director de una recta es cualquier vector que tenga la dirección de la recta. Como al multiplicar un vector por un número no cambia la dirección, si $\vec{u}$ es un vector director de la recta r, también lo es $\alpha\vec{u}$, siendo α un número cualquiera.

Si conocemos el origen y el extremo de un vector, podemos calcular sus coordenadas de la forma siguiente (figura 4.15):

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Como las coordenadas de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ coinciden con las coordenadas de A y B, resulta que las coordenadas de un vector pueden obtenerse restando las coordenadas de su extremo menos las coordenadas de su origen.

Ejercicio 25. Calcular las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ siendo $A(-3, 4)$ y $B(2, 7)$.

Solución:

Según hemos visto.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 26. Dados los puntos $A(-4, 5)$ y $B(5, -1)$ calcular los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

Solución:

Calculamos en primer lugar el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} = (-4, 5) + \frac{1}{3}\,\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\,\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los puntos son $P(-1, 3)$ y $Q(2, -1)$.

♠♠♠♠

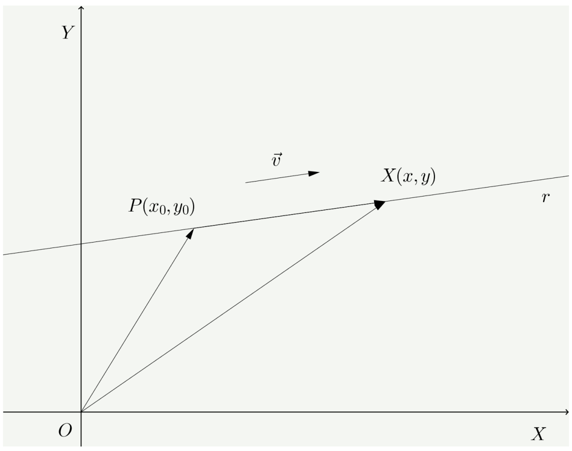


Figura 4.16: Ecuación vectorial de la recta

4.9. Otras formas de la ecuación de la recta

◇ Supongamos que la recta está definida por un punto P dado por su vector de posición $\overrightarrow{OP}$ y un vector director $\vec{v}$. Sea X un punto cualquiera de la recta con vector de posición $\overrightarrow{OX}$. Evidentemente se cumple que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$$

Pero si X está sobre la recta, los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PX}$ tienen la misma dirección y, por consiguiente, $\overrightarrow{PX}$ es igual a un número t por $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$$

Esta es la **ecuación vectorial** de la recta dada por el punto P y el vector $\vec{v}$. Se le puede dar una interpretación física como la trayectoria de un móvil que se mueve con velocidad uniforme $\vec{v}$ y que en el momento inicial se encuentra en el punto P. En esta interpretación el parámetro t sería el tiempo y en cada instante t la ecuación nos daría la posición del móvil.

◇ Si en la ecuación vectorial representamos los vectores por sus coordenadas resulta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \end{cases}$$

Estas son las **ecuaciones paramétricas** de la recta. Los coeficientes del parámetro t son las coordenadas del vector director y los términos independientes son las coordenadas de un punto de la recta (el que se obtiene haciendo $t = 0$).

◇ En el caso de que v_x y v_y sean distintos de cero, puede despejarse t en las ecuaciones paramétricas. Igualando obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}$$

que se llama **ecuación continua** de la recta. A veces se escribe también la forma continua de la ecuación aunque alguna de las coordenadas del vector director sea cero. Por ejemplo:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{0}$$

Evidentemente no hay que entender que haya que dividir por cero sino que la segunda coordenada del vector director es cero. En este caso, el numerador debe ser también igual a cero, es decir, se trata de la recta $y = 1$, una recta paralela al eje de abscisas.

Si quitamos denominadores y pasamos todos los términos al primer miembro obtendríamos la ecuación implícita:

$$v_y x - v_x y + v_x y_0 - v_y x_0 = 0$$

Comparando con la expresión genera de la ecuación implícita $Ax + By + C = 0$, igualando coeficientes tenemos que

$$\begin{aligned} A &= v_y \\ B &= -v_x \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$$

y podemos dar la siguiente interpretación a los coeficientes A y B de la ecuación implícita: $-B$ yA son las coordenadas de un vector director de la recta.

Ejercicio 27. Escribir en forma vectorial, paramétrica y continua, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(5,-1)$.

Solución:

El vector $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ es un vector director de la recta.

La ecuación vectorial es:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

En forma paramétrica, esta ecuación se escribe:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$$

Finalmente, en forma continua:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-4}$$

♠♠♠♠

4.10. Cónicas

Hasta ahora hemos visto que las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, consideradas éstas como coordenadas de puntos del plano, forman una línea recta. Las soluciones de las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas, es decir, de ecuaciones del tipo.

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

no forman rectas sino un tipo de curvas que se denominan cónicas o secciones cónicas porque se obtienen de la intersección de una superficie cónica con un plano. En lo que sigue estudiaremos estas curvas definiéndolas como lugares geométricos, esto es, como conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.

4.10.1. Circunferencia

Se llama así al conjunto de puntos que se encuentran a la misma distancia (radio) de un punto dado (centro de la circunferencia). Sea la circunferencia de centro en el punto $C(x_0, y_0)$ y radio r. Para que el punto $X(x,y)$ se encuentre en la circunferencia debe cumplirse que:

$$d(X,C) = r \qquad \text{y sustituyendo resulta}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

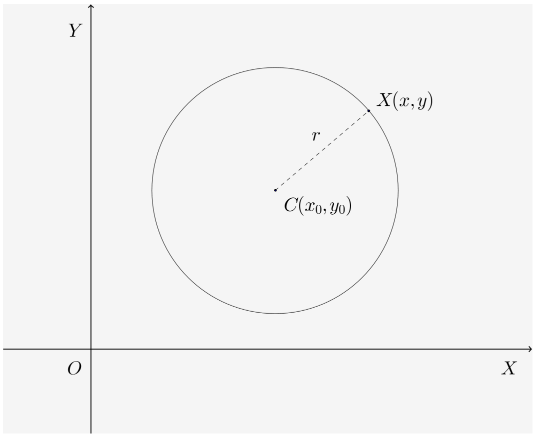


Figura 4.17: Circunferencia

Esta es la ecuación de una circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r. Desarrollando las potencias se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

En general, una ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$$

representa una circunferencia en la que las coordenadas del centro (x_0, y_0) y el radio están dados por el sistema:

$$\begin{aligned} -2x_0 &= C \\ -2y_0 &= D \\ x_0^2 + y_0^2 - r^2 &= F \end{aligned}$$

4.10.2. Elipse

Se llama elipse al conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos puntos (focos) es constante (ver figura 4.18).

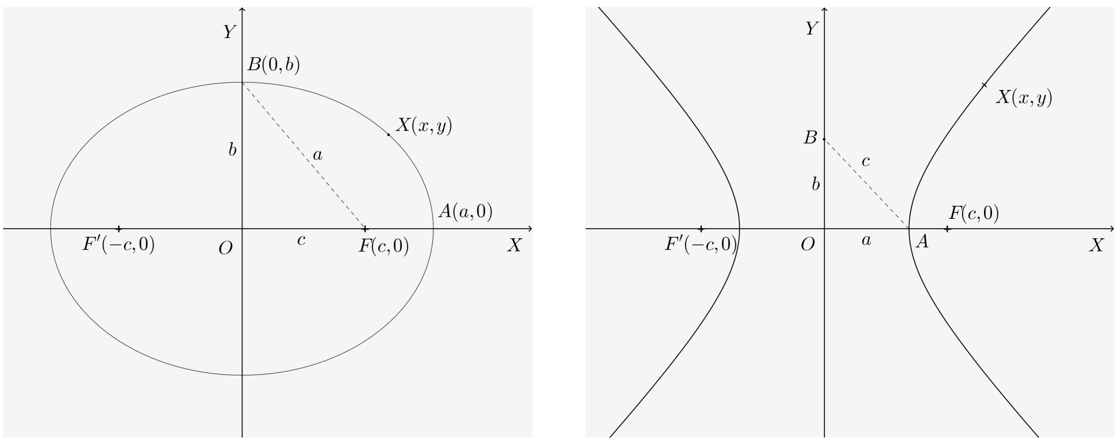


Figura 4.18: La elipse y la hipérbola

Una elipse queda definida por los siguientes elementos:

- ◇ El semieje mayor a
- ◇ El semieje menor b
- ◇ La semidistancia focal c
- ◇ La excentricidad e

Los tres primeros cumplen que $a^2 = b^2 + c^2$.

La excentricidad se define por la fórmula:

$$e = \frac{c}{a}$$

La excentricidad es un número comprendido entre 0 y 1. Si la excentricidad es cero la elipse es una circunferencia; si es igual a 1 es un segmento. A partir de la definición y de las relaciones que hemos visto entre sus elementos puede calcularse la ecuación de una elipse centrada en los ejes (ver figura 4.18). La ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4.10.3. Hipérbola

La hipérbola es una curva definida por la propiedad de que la diferencia de distancias de sus puntos a dos puntos (focos) es constante. Una hipérbola queda determinada por los siguientes elementos (ver figura 4.18):

- ◇ El semieje real a
- ◇ La semidistancia focal c
- ◇ El semieje imaginario b definido por $c^2 = a^2 + b^2$
- ◇ La excentricidad $e = \frac{c}{a}$

La excentricidad de una hipérbola es siempre mayor o igual a uno. La hipérbola de excentricidad 1 está formada por dos semirrectas. La ecuación de la hipérbola centrada en los ejes se deduce fácilmente a partir de la definición:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

. La hipérbola es una curva con asíntotas. Éstas son rectas con la propiedad de que cuando x se hace muy grande (tiende a infinito) su distancia a la hipérbola se hace muy pequeña (tiende a cero). Lo mismo pasa cuando x se hace muy pequeño (tiende a menos infinito). La ecuación de las asíntotas es:

$$y = \pm\, \frac{b}{a}\, x$$

4.10.4. Parábola

Una parábola está formada por el conjunto de puntos que equidistan de un punto (foco) y una recta (directriz).

La parábola viene caracterizada por la distancia entre el foco y la directriz que se denomina **parámetro** de la parábola.

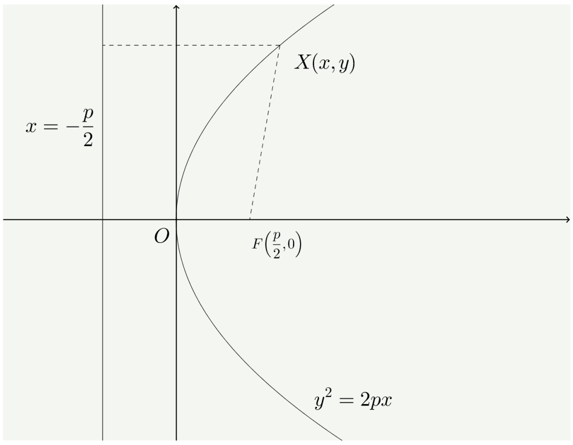


Figura 4.19: Parábola

Si el foco se encuentra sobre el eje de abscisas, la directriz es paralela al eje de ordenadas y ambos elementos se encuentran a la misma distancia del origen, la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 2px$$

Ejercicio 28. Calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,5)$, $B(0,1)$ y $C(2,3)$ y determinar su centro y su radio.

Solución:

◇ Primer método. El centro es equidistante de A y B. Por consiguiente, se encuentra en su mediatriz:

$$y = 3$$

Por ser equidistante de B y C, también se encuentra en la mediatriz de estos dos puntos:

$$x^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9$$
$$4x + 4y - 12 = 0$$
$$x + y - 3 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos mediatrices:

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

se obtiene que el centro es el punto $(0,3)$.
El radio es la distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r = 2$$

◇ Segundo método: sea $x^2 + y^2 + Dx + Ey * F = 0$ la ecuación de la circunferencia que buscamos:

Por pasar por $A(0,5)$:	$25 + 5E + F = 0$
Por pasar por $B(0,1)$:	$1 + E + F = 0$
Por pasar por $C(2,3)$:	$4 + 9 + 2D + 3E + F = 0$

Resolviendo el sistema se obtiene $D = 0$, $E = -6$, $F = 5$, de modo que la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

que se puede escribir como:

$$x^2 + (y-3)^2 - 4 = 0$$

y de aquí deducimos que el centro es el punto $(0,3)$ y que el radio es igual a 2.

♠♠♠♠

Ejercicio 29. Calcular las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a las rectas $3x-4y+12=0$ y $4x+3y=0$, cuyo centro se encuentra sobre la recta $x+2y+3=0$

Solución:

El centro de la circunferencia debe encontrarse sobre las bisectrices de las tangentes:

$$\frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{4x+3y}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

Simplificando, obtenemos para las bisectrices las siguientes ecuaciones:

$$y=7x+12$$
$$y=-\frac{1}{7}x+\frac{12}{7}$$

Para calcular el centro de la circunferencia debemos resolver el sistema formado por cada una de las bisectrices con la recta dada. Tenemos dos soluciones:

- El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

  $$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ y=7x+12 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad C\left(-\frac{9}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

  El radio es la distancia desde este punto a cualquiera de las rectas tangentes:

  $$r=\frac{\left|\frac{-4\cdot 9}{5}-\frac{3\cdot 3}{5}\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{9}{5}$$

  La ecuación de la circunferencia es:

  $$\left(x+\frac{9}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{81}{25}$$

- Procediendo de la misma manera que en el caso anterior se obtiene la segunda solución. El centro es la solución del sistema:

  $$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ y=-\frac{1}{7}x+\frac{12}{7} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad C'(-9,3)$$

  Calculamos el radio:

  $$r'=\frac{|4\cdot(-9)+3\cdot 3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{27}{5}$$

  y la ecuación de la segunda circunferencia es:

  $$(x+9)^2+(y-3)^2=\frac{729}{25}$$

♠♠♠♠

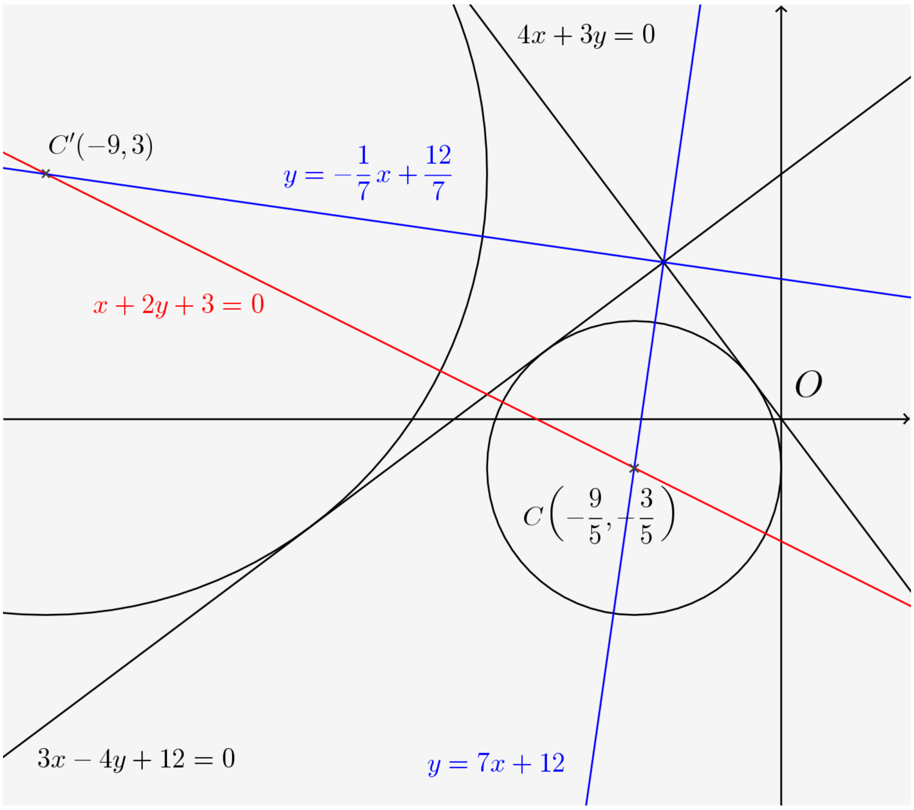


Figura 4.20: Circunferencias tangentes a dos rectas

Tema 5

Números complejos

5.1. Cuerpos

Un cuerpo conmutativo es un conjunto de números que pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse.

Los números racionales, esto es, los números que pueden escribirse en forma de fracción, forman un cuerpo conmutativo que se representa por la letra $\mathbb{Q}$. Los números reales, formados por los racionales e irracionales, se representan por la letra $\mathbb{R}$ y también tienen estructura de cuerpo conmutativo. Sin embargo el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo pues, en general, los números enteros no se pueden dividir, por ejemplo, el cociente de 7 entre 3 no es un número entero.

De forma más precisa, un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$ es un conjunto con cuyos elementos pueden hacerse dos operaciones, suma y producto y estas operaciones tienen las propiedades siguientes:

- Propiedades de la suma:

  1. Asociativa. Para sumar tres elementos pueden asociarse como se quiera

     $$(a + b) + c = a + (b + c)$$

  2. Elemento neutro o cero. Existe un elemento que se le suele llamar cero con la propiedad:

     $$a + 0 = a$$

  3. Elemento simétrico u opuesto. Para cada elemento a del cuerpo existe otro elemento (representado generalmente por $-a$) con la propiedad de que al sumar ambos se obtiene el elemento neutro:

     $$a + (-a) = 0$$

  4. Conmutativa. El resultado de la suma es independiente del orden de los sumandos:

     $$a + b = b + a$$

  La existencia de elemento opuesto hace que exista siempre la diferencia de los números. La diferencia es la suma de un elemento y el opuesto del otro:

  $$a - b = a + (-b)$$

- Propiedades del producto:

  1. Asociativa. Para multiplicar tres elementos pueden asociarse como se quiera

     $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. Elemento neutro o unidad. Existe un elemento que se le suele llamar uno con la propiedad:

   $$a \cdot 1 = a$$

3. Elemento simétrico o inverso. Para cada elemento a del cuerpo salvo para el cero, existe otro elemento (representado generalmente por a^{-1}) con la propiedad de que al multiplicar ambos se obtiene el elemento unidad:

   $$a \cdot a^{-1} = 1$$

4. Conmutativa. El producto es independiente del orden de los factores:

   $$a \cdot b = b \cdot a$$

La existencia de elemento inverso garantiza que se puedan dividir dos números salvo si el divisor es cero. El cociente es el producto del primer elemento por el inverso del segundo:

$$a/b = a \cdot b^{-1}$$

◇ Propiedades de la suma y el producto

Distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Dado un cuerpo $\mathbb{F}$ y un número a no perteneciente al cuerpo, siempre puede encontrarse un cuerpo que contenga a ambos, es decir, al cuerpo $\mathbb{F}$ y al número a. Por ejemplo, si consideramos el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales y el número $\sqrt{2}$ que no es racional, los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ con a y b racionales, forman un cuerpo que incluye a todos los racionales y a $\sqrt{2}$.

5.2. Números complejos

Tanto el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales son cuerpos. La necesidad de ampliar el cuerpo de los racionales, surge del hecho de que muchas funciones, como por ejemplo las raíces o el logaritmo, no tienen sentido dentro de este conjunto.

Según hemos visto, en el conjunto de los números reales tampoco pueden definirse algunas funciones como la raíz cuadrada o el logaritmo para números negativos. La ampliación del concepto de número a los números complejos permite extender el dominio de estas funciones a todos los números.

Para construir los números complejos vamos a añadir a los números reales un número i que llamaremos *unidad imaginaria* y que cumple que $i^2 = -1$, es decir, el número i es una raíz de -1.

Si queremos que el nuevo conjunto sea un cuerpo, para que esté definida la multiplicación, debemos añadir todos los números de la forma bi donde b es un número real. Estos números, producto de un número real por la unidad imaginaria, se llaman números *imaginarios puros*.

Además, puesto que los números se pueden sumar, deben existir los números de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales. Estos números son suma de un número real y un número imaginario puro.

Veremos que con números de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ pueden definirse la suma y la multiplicación con todas las propiedades de un cuerpo conmutativo. Estos números forman el *cuerpo de los números complejos* y esta representación de los complejos como suma de un número real y un número imaginario puro se llama *forma binómica* del número complejo. El cuerpo de los números se representa por $\mathbb{C}$.

Por consiguiente, un número complejo $a + bi$ está formado por dos números reales a y b. El número a se llama *parte real* del complejo, y el número b (el que aparece multiplicando a la unidad imaginaria) se denomina *parte imaginaria* del complejo. Esto es similar a los números fraccionarios que estan compuestos por dos números enteros, el numerador y el denominador.

De la misma forma que los números reales se representan sobre una recta, los números complejos se representan en un plano llamado *Plano de Argand*, tomando la parte real sobre el eje de abscisas (que llamaremos *eje real*) y la parte imaginaria sobre el eje de ordenadas (*eje imaginario*). El punto representativo de un número se llama *afijo* del complejo.

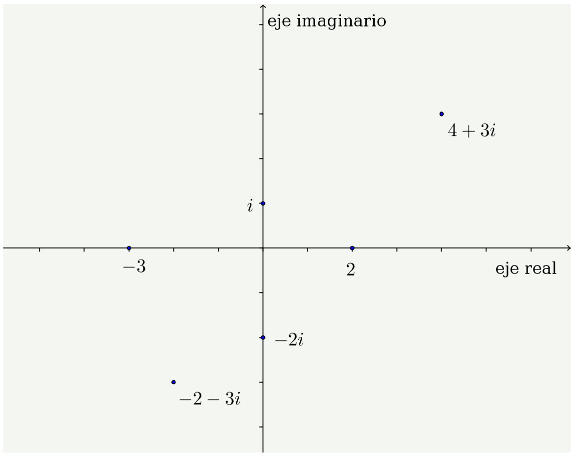


Figura 5.1: Plano complejo o de Argand

En esta representación, los afijos de los números reales están sobre el eje de abscisas y los números imaginarios puros sobre el eje de ordenadas. De ahí los nombres de eje real y eje imaginario con que designamos estos ejes.

Los complejos que tienen la misma parte real y parte imaginaria del mismo valor y signo contrario, es decir, los complejos $a+bi$ y $a-bi$, se llaman conjugados. El conjugado de un complejo z se representa por z^* o también por $\bar{z}$. Los afijos de estos complejos son puntos simétricos respecto al eje real. Los números reales son conjugados de sí mismos. En la figura siguiente pueden verse los afijos de algunos pares de complejos conjugados.

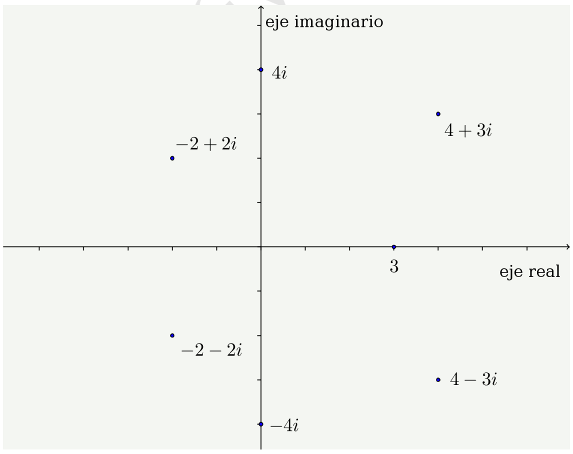


Figura 5.2: Números complejos conjugados

5.3. Operaciones con complejos en forma binómica

◇ **Suma y diferencia.** La suma de complejos en forma binómica se obtiene sumando las partes reales e imaginarias de los dos complejos:

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$$

Por ejemplo:

$$(-5+2i)+(3-i)=-2+i$$
$$(-5+2i)-(3-i)=-8+3i$$

◇ **Producto.** Los complejos se multiplican como si fuesen binomios y el polinomio resultante se reduce teniendo en cuenta que $i^2=-1$:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac-bd+(ad+bc)i$$

Por ejemplo:

$$(6-2i)\cdot(1+5i)=6+30i-2i-10i^2=6+28i+10=16+28i$$

El producto de un complejo por su conjugado es un número real positivo. En efecto, sea $z=a+bi$:

$$zz^*=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

La raíz cuadrada positiva de este número se llama módulo del complejo y se representa por $|z|$:

$$|z|=\sqrt{zz^*}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Por ejemplo:

$$z=7-5i \quad\Longrightarrow\quad |z|=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{84}$$

◇ **Cociente.** La división de un complejo por un número real es muy sencilla, basta dividir por ese número tanto la parte real como la parte imaginaria:

$$\frac{a+bi}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}i$$

Si el divisor es un número complejo, puede reducirse al caso anterior multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Por ejemplo:

$$\frac{1+2i}{-2+3i}=\frac{(1+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}=\frac{-2-3i-4i-6i^2}{2^2+3^2}=\frac{4-7i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$$

◇ **Propiedades de los complejos conjugados.** Definidas las operaciones de esta forma, el conjugado de un complejo tiene las siguientes propiedades:

- $(z_1+z_2)^*=z_1^*+z_2^*$
- $(z_1z_2)^*=z_1^*z_2^*$
- $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^*=\dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

5.4. Potencia y raíz cuadrada en forma binómica

La potencia de un número complejo puede calcularse mediante la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^m=\binom{m}{0}a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}b+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2+\cdots+\binom{m}{m}b^m$$

Para un complejo en forma binómica, la fórmula de Newton se escribe como:

$$(a+bi)^m=\binom{m}{0}a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}bi+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2i^2+\cdots+\binom{m}{m}b^mi^m$$

Para calcular las potencias de la unidad imaginaria tenemos en cuenta lo siguiente:

$i^0 = 1$	$i^4 = i \cdot (-i) = -i^2 = 1$	$i^8 = i \cdot (-i) = -i^2 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i \cdot 1 = i$	$i^9 = i \cdot 1 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i \cdot i = -1$	$i^{10} = i \cdot i = -1$
$i^3 = i \cdot (-1) = -i$	$i^7 = i \cdot (-1) = -i$	$i^{11} = i \cdot (-1) = -i$

Puede verse que las potencias de i se repiten en el orden i, -1, $-i$, 1, y que cuando el exponente es múltiplo de 4 la potencia vale 1. En general, puede escribirse:

$$i^n = i^{n \bmod 4}$$

donde $n \bmod 4$ significa el resto de dividir n entre 4 (se lee n módulo 4).

Ejercicio 30. Calcular $(2-5i)^3$.

Solución:

Aplicando la fórmula del binomio y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$:

$$\begin{aligned}(2-5i)^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot 5i + 3 \cdot 2 \cdot 5^2 i^2 - 5^3 i^3 \\ &= 8 - 60i - 150 + 125i \\ &= -142 + 65i\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Supongamos ahora que queremos calcular la raíz cuadrada del complejo $a+bi$, esto es, queremos calcular un número complejo $x+yi$ que cumpla:

$$(x+yi)^2 = a + bi$$

Desarrollando el cuadrado e igualando la parte real y la parte imaginaria de cada número resulta:

$$x^2 - y^2 - 2xyi = a + bi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

resolviendo el sistema se obtienen las dos raíces cuadradas. Hay que recordar que x e y son números reales.

Más adelante veremos un método mejor para calcular las potencias y raíces de números complejos.

Ejercicio 31. Calcular la raíz cuadrada $\sqrt{21-20i} = x + yi$.

Solución:

Sea $\sqrt{21-20i} = x + yi$. Según hemos visto se cumple que

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 21 \\ 2xy &= -20 \end{aligned}$$

Despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y = \frac{-20}{2x} = \frac{-10}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - \frac{100}{x^2} = 21 \quad \Longrightarrow \quad x^4 - 21x^2 - 100 = 0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada se obtiene $x = -5$ y $x = 5$. Los valores correspondientes de y son 2 y -2. Por consiguiente, las dos raíces son $-5+2i$ y $5-2i$. Comprobemos, por ejemplo, el primer resultado:

$$(-5+2i)^2 = 25 - 20i + 4i^2 = 25 - 20i - 4 = 21 - 20i$$

♠♠♠♠

5.5. Forma polar y trigonométrica del número complejo

El afijo de un número complejo puede determinarse, en lugar de por sus coordenadas cartesianas, por sus coordenadas polares. Éstas son el *módulo* r y el *argumento* φ. El módulo es la distancia del afijo del

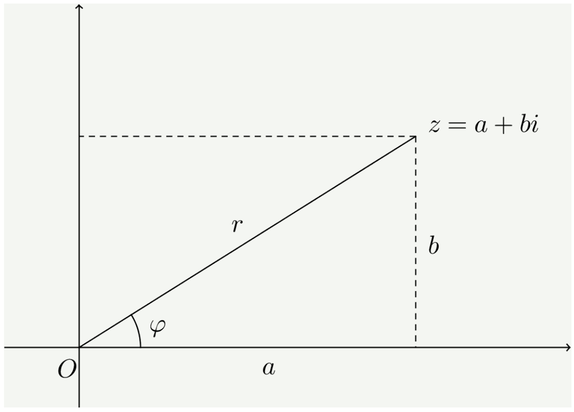


Figura 5.3: Módulo y argumento de un complejo

complejo al origen de coordenadas. Si conocemos la parte real a y la parte imaginaria b del complejo, el módulo es:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El módulo de un complejo es un número real positivo. Se suele representar también escribiendo el complejo entre barras, por ejemplo $|z|$, o $|a + bi|$.

El argumento de un complejo es el ángulo que forma el segmento que une el origen y el afijo del complejo con el semieje real positivo. En realidad, un complejo tiene infinitos argumentos que difieren en un múltiplo de 2π, pues si φ es un argumento también lo es $\varphi + 2k\pi$ donde k es un número entero. El argumento se relaciona con la parte real y la parte imaginaria del complejo por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

siempre determinando el ángulo teniendo en cuenta el cuadrante en el que se encuentra el afijo del complejo.

Un complejo en forma polar se escribe como r_φ. Por ejemplo $2_{\frac{\pi}{3}}$ es el complejo que tiene de módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{3}$.

Ejercicio 32. Calcular el módulo y el argumento del número complejo $-1 + \sqrt{3}i$.

Solución:

El módulo del complejo es:

$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

El afijo del número se encuentra en el segundo cuadrante de modo que el argumento es:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

♠♠♠♠

Si se conocen el módulo y el argumento, la parte real y la parte imaginaria se obtienen mediante

$$a = r \cos \varphi$$
$$b = r \operatorname{sen} \varphi$$

de forma que el complejo $a + bi$ puede escribirse como

$$a + bi = r \cos \varphi + ir \operatorname{sen} \varphi = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

Esta manera de escribir el complejo, sustituyendo r y φ en la última expresión, se llama *forma trigonométrica* del número complejo. Por ejemplo, un complejo en forma trigonométrica sería $3(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})$. Este complejo tiene de módulo 3 y argumento $\frac{\pi}{3}$.

Ejercicio 33. Calcular la expresión en forma binómica del complejo de módulo 2 y argumento 225°.

Solución:

El argumento 225° es igual a $\frac{5\pi}{4}$ radianes. Pasando primero a la forma trigonométrica tenemos que:

$$2_{\frac{5\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

♠♠♠♠

5.6. Producto y cociente en forma trigonométrica

Sean los complejos:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2) \end{aligned}$$

Multipliquemos los dos números:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2) \\ &= r_1r_2\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\right] \\ &= r_1r_2\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + i(\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2)\right] \\ &= r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)\right] \end{aligned}$$

Ésta es la forma trigonométrica de un complejo de módulo r_1r_2 y de argumento $\varphi_1 + \varphi_2$. Llegamos por tanto a la siguiente conclusión: para multiplicar dos complejos en forma polar o trigonométrica, se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

No es difícil imaginar que para dividir complejos se dividirán sus módulos y se restarán sus argumentos. En efecto, dividamos en forma trigonométrica multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\operatorname{sen}\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\operatorname{sen}\varphi_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 - i^2\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \operatorname{sen}^2\varphi_2)} \\ &= \frac{r_1\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + i(\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2)\right]}{r_2} \\ &= \frac{r_1\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i(\operatorname{sen}\varphi_1-\varphi_2)\right]}{r_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i(\operatorname{sen}\varphi_1-\varphi_2)\right] \end{aligned}$$

Como habíamos previsto resulta que el complejo cociente de otros dos, tiene como módulo el cociente de sus módulos y como argumento la diferencia de sus argumentos.

Ejercicio 34. Calcular en forma polar el cociente:

$$\frac{(1+i)3i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$$

Solución:

En primer lugar, calculamos los complejos en forma polar. Es fácil ver que:

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \\ 3i &= 3_{\frac{\pi}{4}} \\ \sqrt{2}-\sqrt{2}i &= 2_{\frac{7\pi}{4}} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{(1+i)3i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}3_{\frac{\pi}{2}}}{2_{\frac{7\pi}{4}}} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{4}} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)_{-\pi} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)_{\pi}$$

♠♠♠♠

5.7. Potencia y raíz en forma polar

Puesto que la potencia de exponente natural no es sino un producto de factores iguales, podemos aplicar la regla de cálculo de productos para calcular las potencias: los módulos deberán multiplicarse y los argumantos sumarse. Puesto que al multiplicar n veces el módulo r por sí mismo se obtiene r^n y al sumar el argumento φ consigo mismo n veces se obtiene $n\varphi$ se tiene que:

$$[r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi)$$

Si $r=1$, la expresión anterior se escribe como

$$\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi = (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^n$$

que se conoce como fórmula de Moivre. La fórmula de Moivre permite calcular el seno y el coseno de los ángulos doble, triple, cuádruple, etc, de un ángulo cualquiera φ a partir de $\operatorname{sen}\varphi$ y $\cos\varphi$.

Ejercicio 35. A partir de la fórmula de Moivre, obtener $\cos 3x$ y $\operatorname{sen} 3x$.

Solución:

Desarrollando la fórmula de Moivre para $n=3$ resulta:

$$\begin{aligned} (\cos 3\varphi + i\operatorname{sen} 3\varphi) &= (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi + 3\cdot\cos^2\varphi\cdot i\operatorname{sen}\varphi + 3\cos\varphi\cdot i^2\operatorname{sen}^2\varphi + i^3\operatorname{sen}^3\varphi \\ &= \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi - 3\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi - i\operatorname{sen}^3\varphi \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $i^2=-1$ y $i^3=-i$. Igualando partes reales e imaginarias resulta:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi \\ \operatorname{sen} 3\varphi &= 3\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Dado que la raíz es la función inversa de la potencia, para calcular la raíz enésima de un complejo, habrá que extraer la raíz del módulo y dividir el argumento por el índice de la raíz. Pero aquí es preciso tener en cuenta que a un complejo le corresponden infinitos argumentos que difieren en un múltiplo entero de 2π de forma que

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

Esto no quiere decir que un complejo tenga infinitas raíces, una para cada valor de k. Para $k=0$ se obtiene la raíz

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}\right)$$

Se obtienen raíces diferentes para $k=1,2,3,\cdots,n-1$ pero para $k=n$ resulta:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2n\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi+2n\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right)$$

que es igual que la raíz obtenida para $k = 0$. De aquí deducimos que todo número complejo tiene exactamente n raíces enésimas.

Todas las raíces de un número complejo r_φ tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$. Puesto que el sentido gráfico del módulo es la distancia al origen del afijo del complejo, los afijos de todas las raíces enésimas se encuentran en la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt[n]{r}$. Las raíces pueden obtenerse unas de otras sumando al argumento el ángulo $\frac{2\pi}{n}$.

En general, las raíces enésimas de un número complejo cumplen:

- ◇ Todas las raíces tienen el mismo módulo.
- ◇ Las raíces están en progresión geométrica. La razón de la progresión es $1_{\frac{2\pi}{n}}$ donde n es el índice de la raíz.
- ◇ La suma de todas las raíces es igual a cero.

En la figura 5.4 pueden verse las raíces quintas del número complejo i.

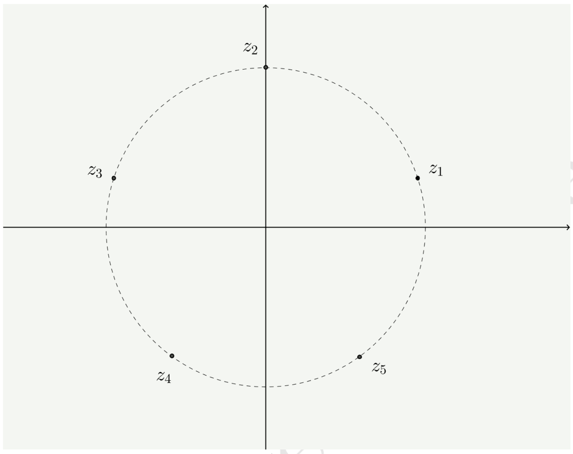


Figura 5.4: Raíces quintas de un número complejo

Ejercicio 36. Calcular las raíces quintas de i.

Solución:

El número i tiene de módulo 1 y argumento $\frac{\pi}{2}$. El módulo de todas las raíces será $\sqrt[5]{1}$. La primera raíz tiene como argumento $\frac{\pi}{2} : 5 = \frac{\pi}{10}$. Las restantes raíces pueden obtenerse de ésta sumando $\frac{2\pi}{5}$. Así obtenemos:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{10} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{10}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{9\pi}{10} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{10}$$

$$z_4 = \cos\left(\frac{9\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{9\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{13\pi}{10} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{10}$$

$$z_5 = \cos\left(\frac{13\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{13\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{17\pi}{10} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{17\pi}{10}$$

♠♠♠♠

5.8. Forma exponencial de un número complejo

La función exponencial para números imaginarios se define por la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$$

Así, un número complejo z de módulo r y argumento φ, puede escribirse como:

$$z = re^{i\varphi}$$

En particular, $e^{i\varphi}$ representa un complejo de módulo 1 y argumento φ.

Las reglas que hemos obtenido para las operaciones con complejos en forma polar, se deducen de forma inmediata de las propiedades de la función exponencial:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1}\, r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 r_2)\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n\, e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i(\varphi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

5.9. Números complejos y transformaciones geométricas

Una correspondencia entre números complejos del tipo $z' = vz + w; \quad v, w \in \mathbb{C}$ asocia a cada complejo z otro número complejo z'. También puede considerarse como una transformación de los puntos del plano, de tal forma que el afijo de z se desplaza al afijo de z'.

La transformación más simple tiene la forma $z' = z + w$. Como puede verse en la figura 5.5, representa una traslación de vector w.

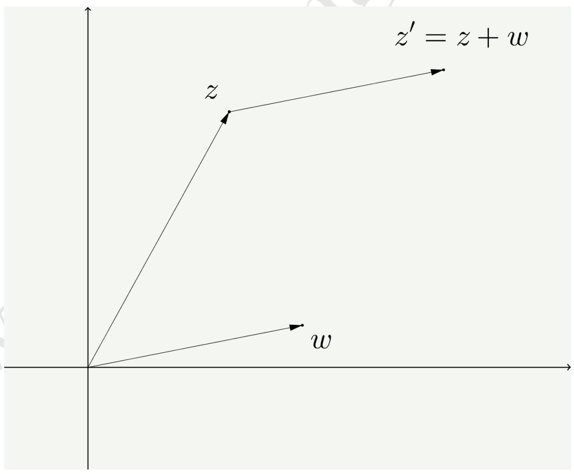


Figura 5.5: Traslación de vector w

Hemos visto que el producto de dos complejos tiene como módulo el producto de los módulos y como argumento la suma de los argumentos. Por ello, si se multiplica un complejo z por otro de módulo 1 y argumento φ, es decir, si se multiplica por $e^{i\varphi}$, el módulo no cambia y el argumento aumenta en φ unidades (figura 5.6). Por consiguiente, la transformación $z' = e^{i\varphi}z$ se puede interpretar geométricamente como un giro de ángulo φ alrededor del origen.

Si la rotación se produce alrededor del afijo de un complejo c, el resultado z' considerado como un vector, es la suma del vector c y del vector $z - c$ girado un ángulo φ. Esta transformación se expresa mediante:

$$z' = c + (z - c)e^{i\varphi}$$

En general, la transformación $z' = e^{i\varphi}z + w$ representa un giro de ángulo φ. Si queremos calcular el centro de giro, buscamos el punto que queda invariante en la transformación igualando $z' = z = c$:

$$c = e^{i\varphi}c + w \quad \Longrightarrow \quad c(1 - e^{i\varphi}) = w \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{w}{1 - e^{i\varphi}}$$

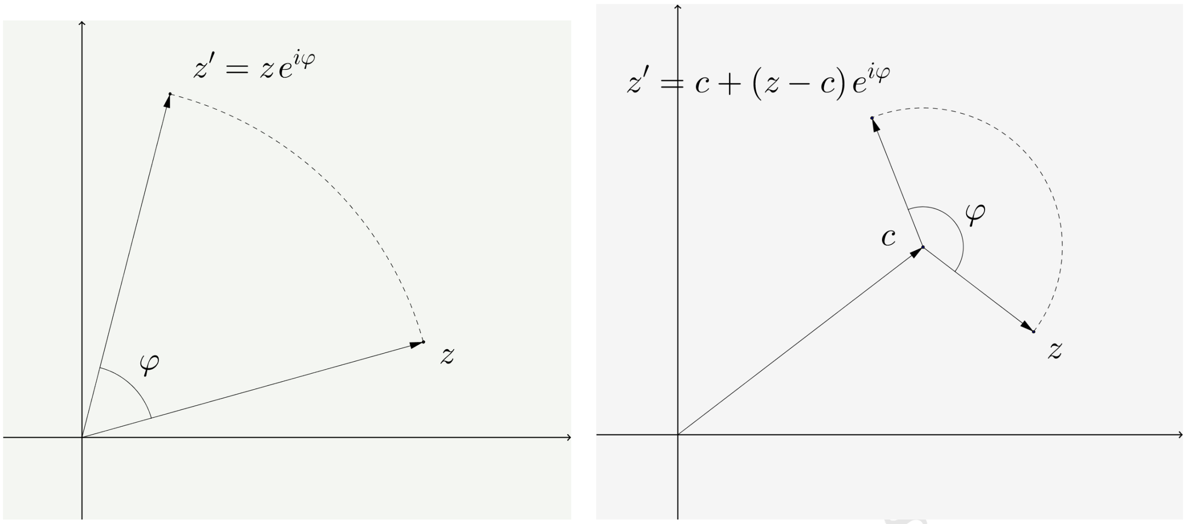


Figura 5.6: Rotación alrededor del origen o de un punto cualquiera

Una homotecia de centro c y razón $k \in \mathbb{R}$ es una transformación que hace corresponder a un punto z otro punto z' que cumple (ver figura 5.7):

- ◇ El punto z' se encuentra en la recta cz.
- ◇ La razón de las distancias de los dos puntos a c es k: $cz' = k \cdot cz$.

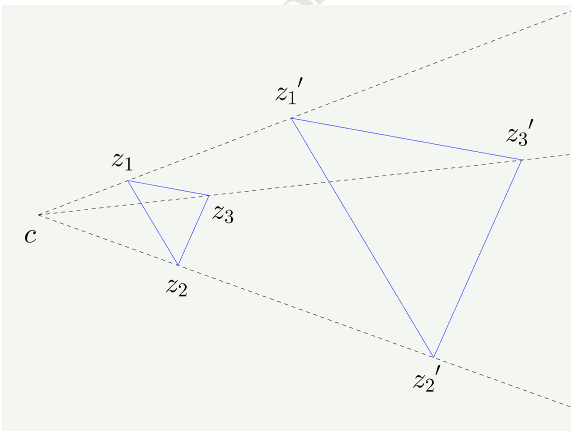


Figura 5.7: Homotecia de centro c

La homotecia de centro c y razón $k \in \mathbb{R}$ se puede representar por la ecuación:

$$z' - c = k(z - c) \quad \Longrightarrow \quad z' = c + k(z - c)$$

Podemos decir que una transformación del tipo $z' = kz + w; \quad k \in \mathbb{R},\ k \neq 1$ representa una homotecia de razón k. El centro de la homotecia podemos encontrarlo calculando el punto invariante de la transformación, es decir, haciendo $z' = z = c$:

$$c = kc + w \quad \Longrightarrow \quad c(1 - k) = w \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{w}{1 - k}$$

En general, la transformación $z' = vz + w$:

- Si $v = 1$ es una traslación de vector w.
- Si $v = e^{i\varphi}$, es un giro de ángulo φ alrededor del punto $c = \dfrac{w}{1 - e^{i\varphi}}$.
- Si $v = k$ es real y $k \neq 1$ es una homotecia de razón k de centro $c = \dfrac{w}{1-k}$.
- En los demás casos es el producto de un giro de ángulo $\varphi = \arg v$ y de una homotecia de razón $k = |v|$. El centro en ambos casos es $c = \dfrac{w}{1-v}$.

Ejercicio 37. En una circunferencia de centro $C(5, 2)$ se inscribe un cuadrado. Si uno de sus vértices es el punto $P_1(-2-1)$, calcular los restantes.

Solución:

Sea $c = 5 + 2i$ el complejo que tiene como afijo el centro de la circunferencia y $z_1 = -2 - i$ el que tiene como afijo el vértice conocido. Los demás vértices pueden obtenerse girando z_1 alrededor de c múltiplos de $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} z_2 &= c + (z_1 - c)\, e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 5 + 2i + (-7 - 3i)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 5 + 2i - 7i + 3 \\ &= 8 - 5i \end{aligned}$$

y de forma similar:

$$\begin{aligned} z_3 &= c + (z_1 - c)\, e^{i\frac{2\pi}{2}} = 12 + 5i \\ z_4 &= c + (z_1 - c)\, e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2 + 9i \end{aligned}$$

Los vértices son $P_2(8, -5)$, $P_3(12, 5)$ y $P_4(2, 9)$.

♠♠♠♠

Tema 6

Sucesiones

6.1. Sucesión.

Una **sucesión** es un conjunto infinito de números ordenados de tal forma que se puede decir cuál es el primero, cuál el segundo, el tercero, etc.

Los términos de una sucesión se designan mediante $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$, en donde el subíndice indica el puesto que ocupa cada término. Un elemento genérico de la sucesión o **término general** se representa por a_n.

En una sucesión, al número natural 1 le corresponde el término a_1 de la sucesión, al número natural 2, le corresponde el término a_2, etc. Por esta razón, una sucesión puede definirse también como una correspondencia entre los números naturales y los números reales.

Cuando queremos determinar una sucesión particular, podemos hacerlo de dos maneras:

- Mediante una fórmula para el término general. Por ejemplo

  $$a_n = \frac{n+1}{n}$$

  Sustituyendo n por $1, 2, 3, \ldots$, obtenemos la sucesión $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \ldots$.

- Mediante una regla de recurrencia, es decir, indicando cómo puede obtenerse cada término a partir de los anteriores. Por ejemplo:

  $$a_1 = 5, \quad a_n = a_{n-1} + 3$$

  Esto indica que el primer término de la sucesión es 5 y que cada término se obtiene sumando 3 al anterior. esto nos permite construir la sucesión $5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$.

Una sucesión es **creciente** si cada término es mayor o igual que el anterior. Si cada término es menor o igual que el anterior, la sucesión es **decreciente**. Si una sucesión es creciente o decreciente se llama **monótona**.

$$\begin{array}{rcl} a_n \text{ creciente} & \iff & a_{n+1} \geq a_n \\ a_n \text{ decreciente} & \iff & a_{n+1} \leq a_n \end{array}$$

6.2. Límite de una sucesión.

Un **entorno simétrico** de centro a y radio r es el intervalo abierto $(a - r\ ,\ a + r)$. El número a es el **centro** y el número r es el **radio** del entorno (figura 6.1).

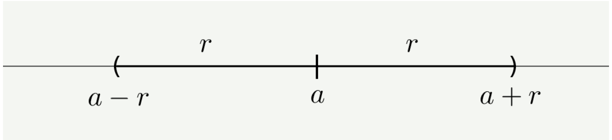


Figura 6.1: Entorno simétrico de un punto

Un número x perteneciente al entorno cumple que $a-r<x<a+r$. Estas dos desigualdades pueden expresarse como:

$$|x-a|<r$$

El valor absoluto de la diferencia $x-a$ es la distancia entre los puntos a y x. Así pues, la desigualdad anterior expresa la condición de que la distancia de los puntos del entorno al centro es menor que el radio.

Algunas sucesiones tienen la propiedad de que sus términos se van aproximando a un número que se llama el **límite de la sucesión**, de tal forma que la diferencia entre el límite y los términos del sucesión se hace muy pequeña. Por ejemplo, es fácil ver que los términos de la sucesión:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

son cada vez más próximos a 1. Se dice que el límite es 1 o que la sucesión tiende a 1.

La idea de que los términos de la sucesión se aproximan a un límite se expresa matemáticamente de la siguiente forma: diremos que la sucesión a_n tiene por límite l y escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Cuando cualquier entorno de centro l y radio ε (por pequeño que sea) contiene un número infinito de términos de la sucesión y fuera queden un número finito de ellos (figura 6.2).

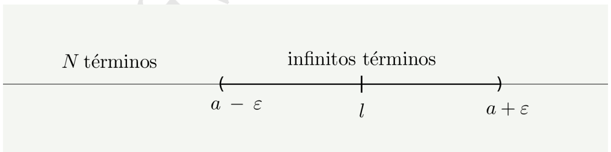


Figura 6.2: Límite de una sucesión

También puede decirse que, dado cualquier número ε, se cumple que. a partir de un término a_N todos los siguientes cumplen que $|a_n-l|<\varepsilon$.

Cuando los términos de la sucesión se hacen muy grandes, es decir, cuando dado cualquier número M, los términos de la sucesión acaban siendo mayores que M, se dice que la sucesión tiende a **infinito** o que el límite de la sucesión es infinito:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

De forma más precisa, diremos que el límite de la sucesión a_n es infinito, si dado cualquier número M (tan grande como queramos) hay infinitos términos de la sucesión mayores que M y un número finito de ellos que son menores que M (figura 6.3).

También puede decirse que el límite de la sucesión a_n es infinito, si dado cualquier número M, a partir de un cierto término a_N, todos los términos de la sucesión son mayores que M.

De forma similar puede definirse el límite $-\infty$. Las sucesiones que tienen límite finito se llaman **convergentes** y las que tienen límite infinito o menos infinito se llaman **divergentes**.

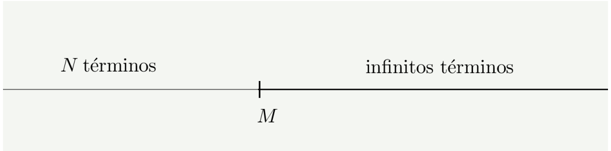


Figura 6.3: Límite infinito

6.3. Cálculo de límites.

Un modo de calcular el límite de una sucesión sería sustituir en la expresión del término general n por un número muy grande. El resultado debería ser un número próximo al límite. Por ejemplo, si en la sucesión de término general:

$$a_n = \frac{3n+1}{n^2}$$

sustituimos n por 1000 obtenemos

$$a_{1000} = \frac{3001}{1000000} = 0{,}003001$$

lo que nos hace pensar que el límite debe ser cero. A partir de la definición de límite podríamos demostrar que efectivamente el límite es cero.

En general, para calcular el límite sustituiremos n por ∞ en la expresión del término general y aplicaremos las siguientes reglas:

- Suma y diferencia. Para todo número a se verifica que:

  $$\infty \pm a = \infty\,; \qquad \infty + \infty = \infty$$

- Producto. Si k es un número distinto de cero:

  $$k \cdot \infty = \infty\,; \qquad \infty \cdot \infty = \infty$$

  El signo del infinito resultante depende de los signos de los factores.

- Cocientes. Para todo número k:

  $$\frac{k}{\infty} = 0\,; \qquad \frac{\infty}{k} = \infty\,; \qquad \frac{k}{0} = \infty$$

  En esta última regla, debe entenderse que el denominador no es exactamente cero sino una sucesión que tiende a cero y que el numerador k es distinto de cero.

- Potencias. Si el exponente tiende a infinito tenemos que:

  $$r^{\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 \le r < 1 \end{cases}$$

  y si la base tiene a infinito:

  $$\infty^{k} = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Con ayuda de estas reglas, podemos calcular muchos límites como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 38. Calcular los siguientes límites:

- $\lim\limits_{n\to\infty} 3n - 5 = 3 \cdot \infty - 5 = \infty - 5 = \infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{3} = \dfrac{5\cdot\infty+1}{3} = \dfrac{\infty+1}{3} = \dfrac{\infty}{3} = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^2+1} = \dfrac{3}{\infty^2+1} = \dfrac{3}{\infty+1} = \dfrac{3}{\infty} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2-\dfrac{3}{n}\right)^n = \left(2-\dfrac{3}{\infty}\right)^\infty = (2-0)^\infty = 2^\infty = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} 5^{1-n} = 5^{1-\infty} = 5^{-\infty} = \dfrac{1}{5^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

♠♠♠♠

Cuando no pueden aplicarse las reglas generales se habla de **casos de indeterminación**. Hay 7 casos de indeterminación:

- Diferencia de infinitos:

$$\infty - \infty$$

- Producto de cero por infinito:

$$0 \cdot \infty$$

- Cociente de infinitos y de ceros:

$$\frac{\infty}{\infty}\ ; \qquad \frac{0}{0}$$

- Indeterminaciones con potencias:

$$1^\infty\ ; \qquad \infty^0\ ; \qquad 0^0$$

No hay una regla general para el cálculo de estos límites. La técnica a aplicar depende de las funciones que aparezcan en la expresión del término general.

En el caso de que el término general esté definido por una expresión polinómica, la indeterminación que se presenta es del tipo $\infty - \infty$ y se resuelve teniendo en cuenta que el término de mayor grado es infinitamente mayor que los términos de grado inferior que, por consiguiente se pueden ignorar, como vemos en los siguientes ejemplos.

Ejercicio 39. Calcular los siguientes límites:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2-3n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty^2 = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (5n^2-n^3) = \lim\limits_{n\to\infty} (-n^3) = -\infty$

Podemos ver que el límite de una expresión polinómica es $+\infty$ o $-\infty$ según que el término de mayor grado tenga coeficiente positivo o negativo.

♠♠♠♠

Si el término general está dado por una función racional, es decir, por un cociente de polinomios en n, se presenta una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso, se puede aplicar la técnica anterior al numerador y al denominador.

Ejercicio 40. Calcular los siguientes límites:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-5n+6}{2n^3-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{2n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2n} = \dfrac{3}{\infty} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^4-2n+1}{2n^2+4n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^4}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2}{2} = \dfrac{\infty}{2} = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n+6}{n^2+5n-3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{n^2} = 3$

♠♠♠♠

En consecuencia, si el término general de la sucesión viene dado por una función racional:

- ⋄ El límite es 0 si el denominador es de mayor grado que el numerador.
- ⋄ Es ∞ si el numerador es de mayor grado que el denominador.
- ⋄ Es igual al cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado si el numerador y el denominador son del mismo grado.

6.4. El número e.

Se llama así al límite de la siguiente sucesión:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Como se ve se trata de un límite indeterminado del tipo 1^∞. El límite de esta sucesión no es infinito, pues puede demostrarse fácilmente (sabiendo un poco de combinatoria) que todos sus términos son menores que 3. Se ha demostrado que e es un número irracional cuyas primeras cifras son:

$$e = 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,36\ldots$$

Con ayuda del número e pueden calcularse muchos límites indeterminados del tipo 1^∞. En particular, es fácil ver que si a, b, k son números cualesquiera:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^{n+b} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} = e^k$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n} = e^k$$

Ejercicio 41. Demostrar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n} = e^k$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}\cdot k} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k = e^k$$

♠♠♠♠

6.5. Progresiones aritméticas y geométricas

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números en la que cada término es igual al anterior más un número constante que se llama diferencia de la progresión:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

De la definición se deduce que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 4d \\ \cdots & \quad \cdots \end{aligned}$$

En general se cumple que:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Aplicando la fórmula anterior a dos términos de la progresión se obtiene:

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 + d \cdot (m-1) \\ a_n &= a_1 + d \cdot (n-1) \end{aligned}$$

Restando las dos igualdades resulta:

$$\boxed{a_m = a_n + d \cdot (m-n)}$$

fórmula que permite obtener cualquier término de la sucesión a partir de otro término y de la diferencia.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Agrupando los sumandos el primero con el último, el segundo con el penúltimo, etc:

$$S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots$$

Todos los paréntesis son iguales y hay $\frac{n}{2}$ paréntesis. Por consiguiente:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números en que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón de la progresión:

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

Razonando de forma similar a como se hizo con las progresiones aritméticas resulta:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Aplicando esta fórmula a dos términos:

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 \cdot r^{m-1} \\ a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene:

$$\boxed{a_m = a_n \cdot r^{m-n}}$$

Si en la expresión:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

multiplicamos por r y restamos, resulta:

$$\begin{array}{lcl}
S_n & = a_1 + a_2 & + a_3 \; + \cdots + a_n \\
S_n r & = & a_1 r + a_2 r + \cdots + a_{n-1} r + a_n r \\
\hline
S_n - S_n r = a_1 & & \qquad\qquad\qquad\qquad - a_n r
\end{array}$$

De aquí se obtiene la fórmula para la suma:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}}$$

Si la razón de la progresión está comprendida entre -1 y 1, el término a_n tiende a cero cuando n tiende a infinito. En este caso existe el límite de S_n:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$$

Por consiguiente, para estas progresiones podemos escribir:

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}} \qquad -1 < r < 1$$

Tema 7

Funciones

7.1. Definiciones.

Una **función** f es una correspondencia que asocia a cada número real x (**variable independiente**) un único número real $f(x)$ (**variable dependiente**). La representación gráfica de la función f es la curva de ecuación $y = f(x)$ formada por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

El **dominio** o dominio de definición de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x. El **recorrido** es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente $f(x)$.

Una función como $\cos^2 x$ puede considerarse como la aplicación sucesiva a la variable independiente x de la función $f(x) = \cos x$ y de la función $g(x) = x^2$. Esta operación consistente en aplicar sucesivamente dos funciones se llama composición de funciones y se representa por $g \circ f$:

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

En general, la composición de funciones no es conmutativa. Por ejemplo, es diferente $\cos^2 x$ que $\cos(x^2)$.

Dos funciones f y f^{-1} son **inversas** una de la otra si

$$f(x) = y \quad \Longrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \qquad \text{o bien} \qquad f \circ f^{-1}(x) = x$$

Son funciones inversas el cuadrado y la raíz cuadrada, el logaritmo y la exponencial o el arcoseno y el seno puesto que:

$$\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x \; ; \qquad \ln e^x = e^{\ln x} = x \; ; \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arsen} x) = \operatorname{arsen}(\operatorname{sen} x) = x$$

La función inversa sirve para despejar el argumento de una función. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x^2 = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \sqrt{y} \\ \ln x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = e^y \\ e^x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \ln y \\ \cos x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \operatorname{arcos} y \end{aligned}$$

La función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo si para puntos x_1, x_2 en ese intervalo:

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

De forma similar, $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo si para puntos x_1, x_2 en ese intervalo:

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

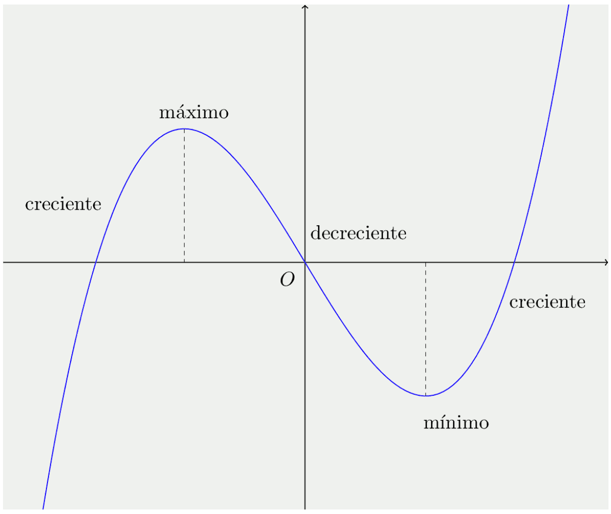


Figura 7.1: Intervalos de crecimiento y decrecimiento

La función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor mayor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

Una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor menor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

También podemos clasificar los puntos de la gráfica de una función según que la tangente quede por encima o por debajo de la curva. Si la tangente en un punto queda por encima de la curva, diremos que la función es **convexa** en ese punto y si queda por debajo diremos que la función es **cóncava**. Los puntos en que la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman **puntos de inflexión** de la curva. En estos puntos, la tangente atraviesa la curva.

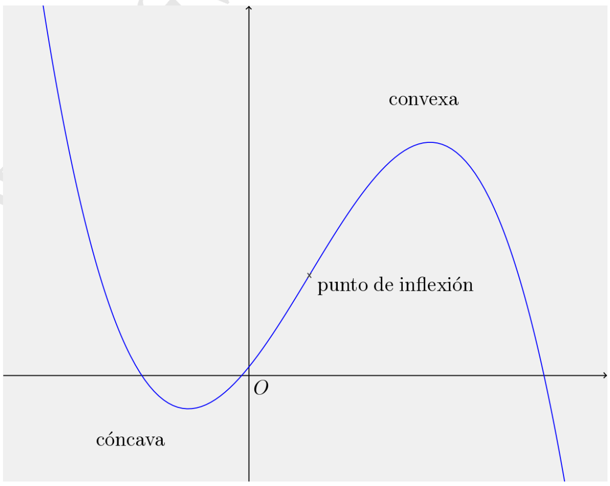


Figura 7.2: Intervalos de concavidad y convexidad

Si la tangente en un punto queda por encima de la curva, diremos que la función es **convexa** en ese punto y si queda por debajo diremos que la función es **cóncava**. Los puntos en que la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman **puntos de inflexión** de la curva. En estos puntos, la tangente atraviesa la curva.

Una función es **par** o **simétrica respecto al eje de ordenadas** si cumple que $f(-x) = f(x)$. Las funciones polinómicas que tienen solamente potencias pares son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Una función es **impar** o **simétrica respecto al origen** si cumple que $f(-x) = -f(x)$. Las funciones polinómicas que tienen solamente potencias impares son simétricas respecto al origen.

Una **función periódica** de período T es aquella cuyos valores se repiten a intervalos de longitud T, es decir que:

$$f(x+T) = f(x)$$

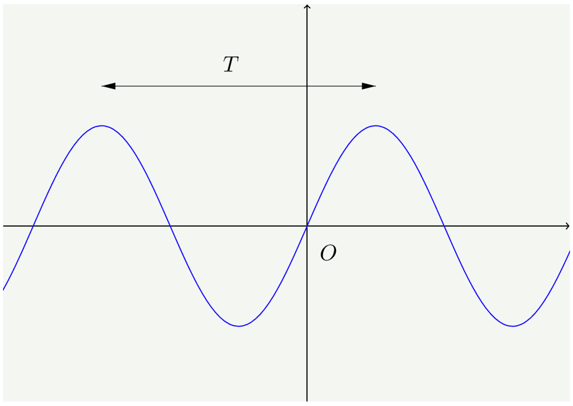


Figura 7.3: Función periódica

Ejercicio 42. Sea la función $f(x) = 4e^{2x} - 3$, calcular $f^{-1}(x)$.

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = 4e^{2y} - 3\ ; \qquad e^{2y} = \frac{x+3}{4}\ ; \qquad 2y = \ln\frac{x+3}{4}\ ; \qquad y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+3}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 43. Calcular el dominio de definición de la función:

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$$

Solución:

Para que exista el numerador debe ser $x > -1$ y para que el denominador exista y sea distinto de cero debe ocurrir que $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Para que se cumplan las dos condiciones debe ser $x > \sqrt{3}$.

♠♠♠♠

7.2. Funciones de primer y segundo grado.

Recordemos que la representación gráfica de las funciones polinómicas de primer grado

$$f(x) = mx + b$$

es una línea recta de pendiente m y cuya ordenada en el origen es b.

La representación gráfica de la función polinómica de segundo grado o función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es una parábola. La parábola presenta un mínimo o un máximo según que el coeficiente de x^2 sea positivo o negativo. El máximo o mínimo de la función es el vértice de la parábola.

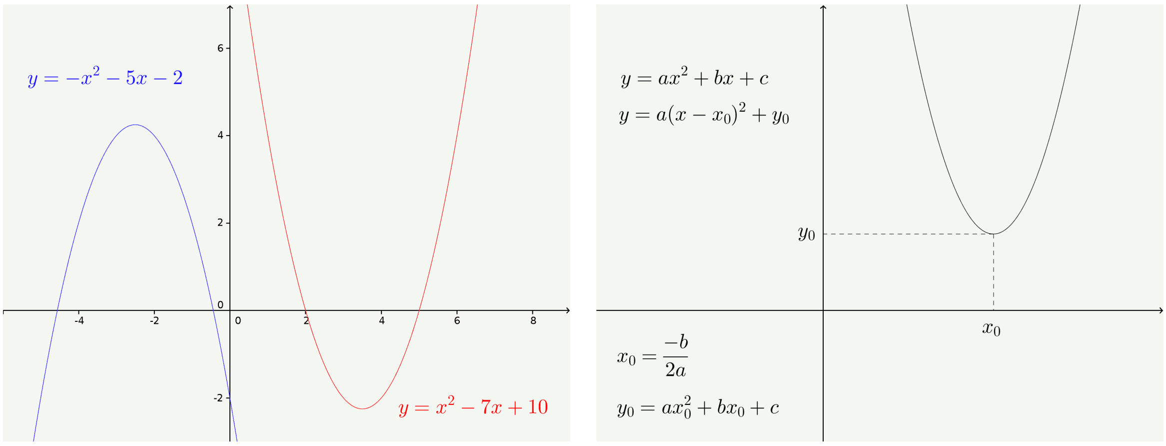


Figura 7.4: Función cuadrática

Las intersecciones de la parábola con los ejes se obtienen resolviendo el sistema formado por la ecuación de la parábola y la ecuación de los ejes.

$$OX: \begin{cases} y = ax^2 + bx + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad OY: \begin{cases} y = ax^2 + bx + c = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Las coordenadas del vértice se calculan de la siguiente forma: la abscisa del vértice es el punto medio de las intersecciones (si existen) con el eje OX. Una vez calculada la abscisa, se obtiene la ordenada sustituyendo en la ecuación de la parábola:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\ ; \qquad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

Si la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene su vértice en el punto $V(x_0, y_0)$ su ecuación puede escribirse

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Ejercicio 44. Representar gráficamente la función $y = x^2 - 5x - 14$.

Solución:

El punto de intersección con el eje de ordenadas es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 14 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(0, -14)$$

Los (posibles) puntos de intersección con el eje de abscisas se obtienen del sistema:

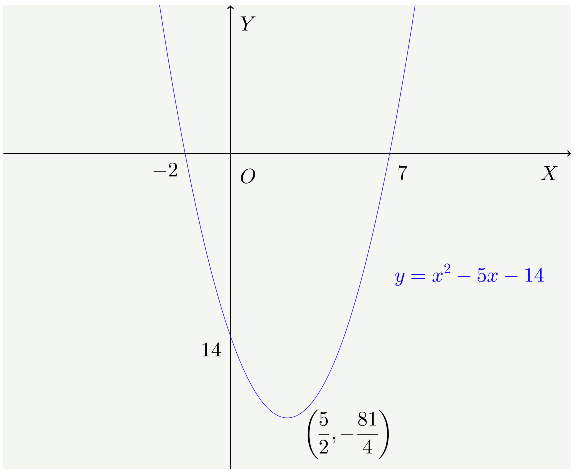
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 14 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

Hay dos puntos de intersección de abscisas -2 y 7. Los puntos son entonces $B_1(-2, 0)$ y $B_2(7, 0)$

El vértice tiene como coordenadas

$$x_0 = \frac{5}{2}; \qquad y_0 = \frac{25}{4} - 5 \cdot \frac{5}{2} - 14 = -\frac{81}{4}$$

Con estos datos, la representación gráfica sería:



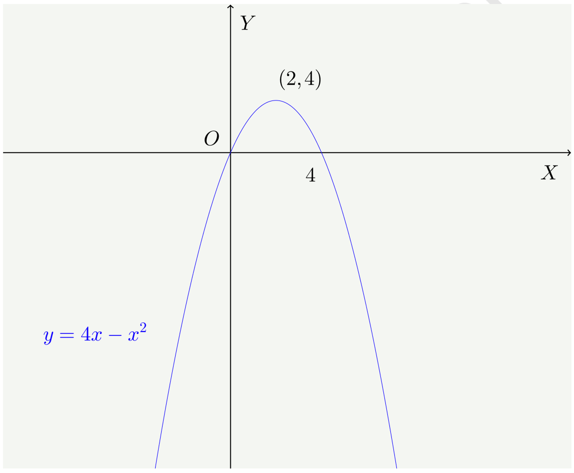
♠♠♠♠

Ejercicio 45. Representar gráficamente la función $y = 4x - x^2$.

Solución:

Procediendo de forma similar al problema anterior resulta que la intersección con el eje OY es el punto $(0,0)$, las intersecciones con el eje OX están en $(0,0)$ y $(4,0)$ y el vértice en $(2,4)$.

La representación gráfica es:



Obsérvese que, puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, la función presenta un máximo al contrario de lo que ocurría en el ejemplo anterior.

♠♠♠♠

7.3. Función de proporcionalidad inversa.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si su producto es constante. Las funciones definidas mediante ecuaciones del tipo:

$$y = \frac{k}{cx+d} \qquad \text{ó} \qquad y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** y la curva correspondiente es una **hipérbola**. Esta curva puede dibujarse calculando sus intersecciones con los ejes:

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ x = 0 \end{cases}$$

y sus **asíntotas**. Más adelante se verá cómo se pueden obtener las asíntotas de cualquier curva. Para la función de proporcionalidad inversa la asíntota vertical se obtiene igualando a cero el denominador y la asíntota horizontal dividiendo los coeficientes de x:

$$\text{asíntota horizontal: } y=\frac{a}{c} \qquad \text{asíntota vertical: } x=\frac{-d}{c}$$

Conocidas las asíntotas $x=x_0$ e $y=y_0$, la ecuación de la hipérbola puede escribirse en la forma:

$$(x-x_0)(y-y_0)=k$$

donde se pone de manifiesto que las magnitudes inversamente proporcionales son $x-x_0$ e $y-y_0$.

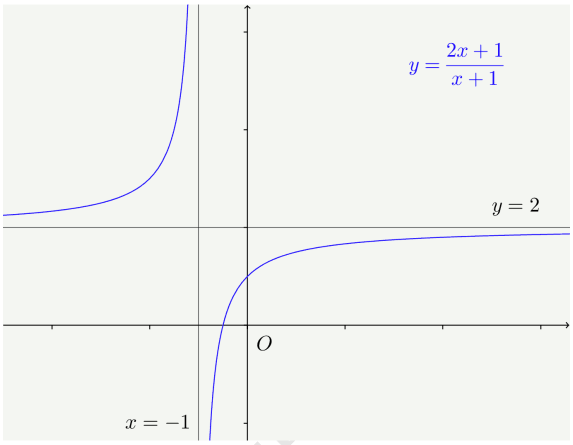


Figura 7.5: Función de proporcionalidad inversa

Ejercicio 46. Representar gráficamente la función:

$$y=\frac{2x-5}{x-3}$$

Solución:

La asíntota vertical es $x-3=0$, es decir, $x=3$.

La asíntota horizontal es $y=2$ (y igual al cociente de los coeficientes de x).

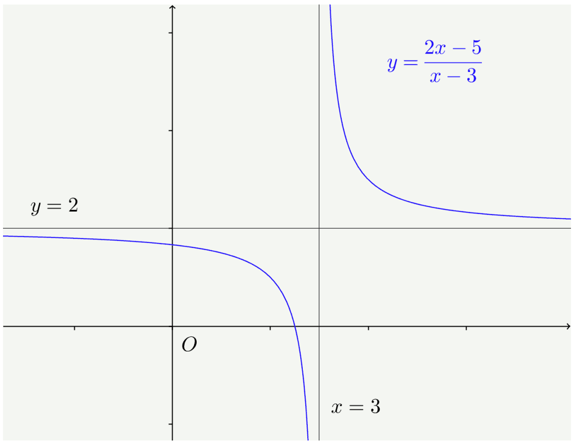
Calculamos las intersecciones con los ejes. El punto de intersección con el eje de abscisas es:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x-5}{x-3} \\ y=0 \end{cases} \implies A\left(\frac{5}{2},0\right)$$

y el punto de intersección con el eje de ordenadas:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x-5}{x-3} \\ x=0 \end{cases} \implies B\left(0,\frac{5}{3}\right)$$

Con estos datos, la gráfica de la función es la siguiente:



♠♠♠♠

7.4. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones definidas por $y = a^x$ donde a es un número positivo cualquiera se llaman **funciones exponenciales**. Sea cual sea el valor de a, la función puede escribirse en la base e, es decir como $y = e^{kx}$ con $k = \ln a$ positivo o negativo según que a sea mayor o menor que 1. Como características más importantes de estas funciones destaquemos las siguientes:

- Sea cual sea el valor de x, e^{kx} es positivo.
- El eje de abscisas, esto es la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $y = e^{kx}$ en $-\infty$ o $+\infty$ según sea k positivo o negativo.
- La curva $y = e^{kx}$ no corta al eje de abscisas. Corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 1)$.

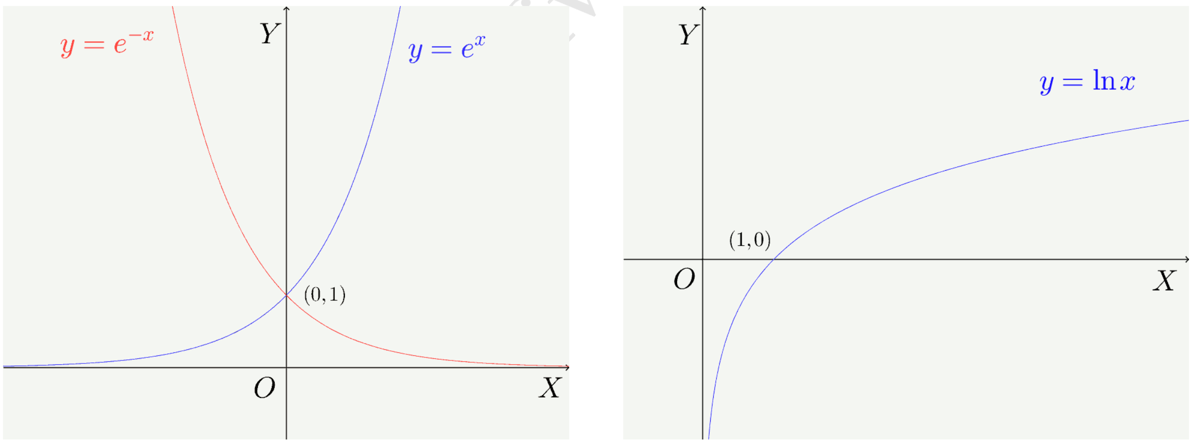


Figura 7.6: Funciones exponenciales y logarítmicas

Se llaman funciones logarítmicas las definidas por $f(x) = \log_a x$. Con ayuda de la fórmula del cambio de base de los logaritmos, cualquier función logarítmica puede expresarse como $y = k \cdot \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano o sea el logaritmo en la base e. Como propiedades fundamentales de estas funciones citaremos:

- Las funciones logarítmicas solo existen para x positivo.
- La recta $x = 0$ (el eje de ordenadas) es asíntota vertical de $y = k \cdot \ln x$.
- La curva $y = k \cdot \ln x$ no corta al eje de ordenadas. Corta al eje de abscisas en $(1, 0)$.

7.5. Funciones circulares.

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \operatorname{tg} x$ así como sus recíprocas cosecante, secante y cotangente, tienen la particularidad de que son periódicas, es decir toman valores iguales cada 2π radianes.

Como se ve (figura 7.7), las gráficas de las funciones seno y coseno son iguales pero desfasadas en $\frac{\pi}{2}$. La función tangente tiene asíntotas $x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ para $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

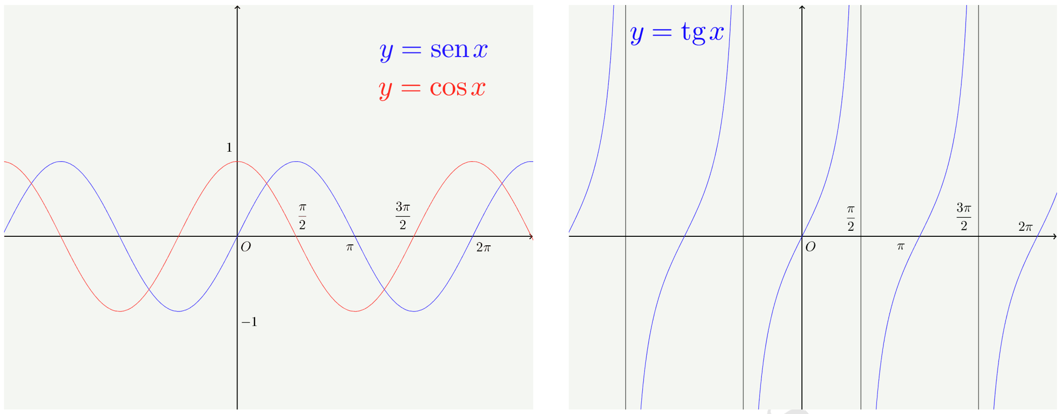


Figura 7.7: Funciones circulares

Las inversas de estas funciones se llaman **arcoseno**, **arcocoseno** y **arcotangente**. Estas funciones se definen de la siguiente manera:

- $\operatorname{arsen} x$ es el ángulo (en radianes) comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno vale x.
- $\arccos x$ es el ángulo comprendido entre 0 y π cuyo coseno vale x.
- $\operatorname{artg} x$ es el ángulo comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuya tangente vale x.

7.6. Transformación de funciones

Sea la función definida por $y = f(x)$.

- **Traslaciones.**

  La gráfica de $y = f(x - x_0)$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ hacia la derecha x_0 unidades.
  La gráfica de $y = y_0 + f(x)$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ hacia arriba y_0 unidades.

- **Simetrías.**

  La gráfica de $y = f(-x)$ es simétrica de $y = f(x)$ respecto al eje de ordenadas.
  La gráfica de $y = -f(x)$ es simétrica de $y = f(x)$ respecto al eje de abscisas

- **Cambios de escala.**

  La gráfica de $y = f(kx)$, $k > 0$ es la misma que la de $y = f(x)$ dividiendo por k la escala en el eje de abscisas.
  La gráfica de $y = kf(x)$ es la misma que la de $y = f(x)$ multiplicando por k la escala del eje de ordenadas.

- **Función recíproca.**

  Para dibujar $y = \frac{1}{f(x)}$ a partir de $y = f(x)$ tendremos en cuenta lo siguiente:

  - Dibujamos las rectas $y = 1$ e $y = -1$. Los puntos de intersección de $y = f(x)$ con estas rectas pertenecen también a la gráfica de la función recíproca.

- Los ceros de una función son asíntotas verticales de la otra y viceversa.
- Cuando una de las funciones es creciente la otra es decreciente. Los máximos y mínimos de una función son mínimos y máximos de la otra (salvo que tengan ordenada cero).
- Si una de las funciones tiende a infinito la otra tiende a cero y viceversa.
- Para cada valor de x las dos funciones tienen el mismo signo.

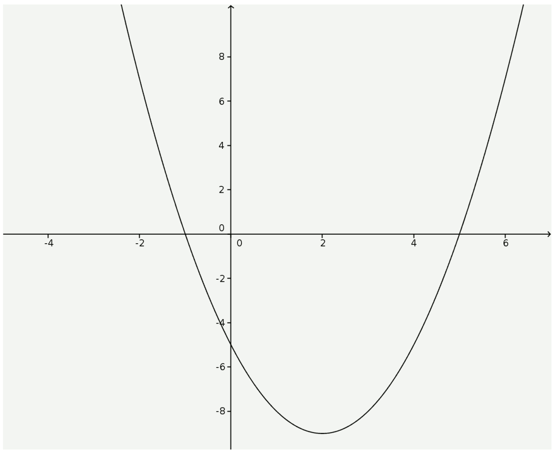
◇ **Valor absoluto.**

Para $x > 0$ la gráfica de la función $y = f(|x|)$ es igual que la de $y = f(x)$. Para $x < 0$ es la imagen reflejada en el eje de ordenadas de la parte correspondiente a los x positivos.
La gráfica de la función $y = |f(x)|$ es igual que la de $y = f(x)$ si $f(x) > 0$. Cuando $f(x) < 0$ es la simétrica de $y = f(x)$ respecto al eje de abscisas.

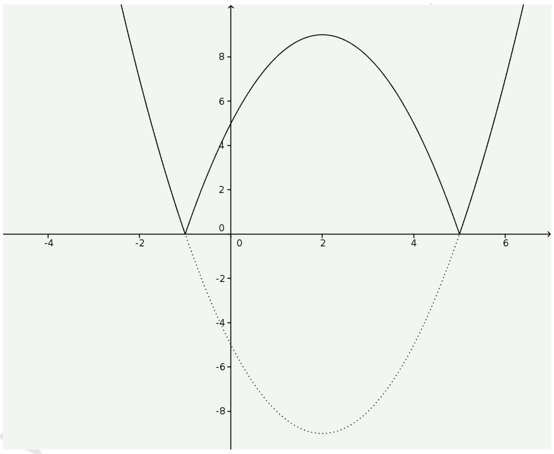
Ejercicio 47. Dibujar aproximadamente el gráfico de $y = |x^2 - 4x - 5|$ e $y = x^2 - 4|x| - 5$.

Solución:

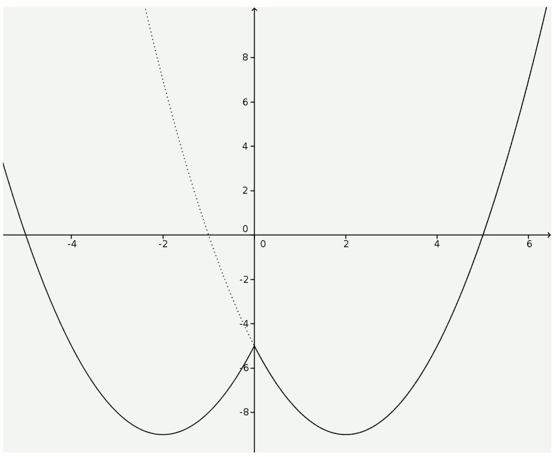
La gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x - 5$ es:



La gráfica de $y = |x^2 - 4x - 5|$ es:



La gráfica de $y = x^2 - 4|x| - 5$ se obtiene reflejando en el eje OY la parte correspondiente a las x positivas:



♠♠♠♠

Ejercicio 48. Sean las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}\ ; \qquad g(x) = 1 - \frac{2}{x+3}$$

(a) Explicar qué transformaciones permiten pasar de $f(x)$ a $g(x)$.

(b) Representar la curva $y = g(x)$ indicando sus asíntotas y sus intersecciones con los ejes de coordenadas.

Solución:

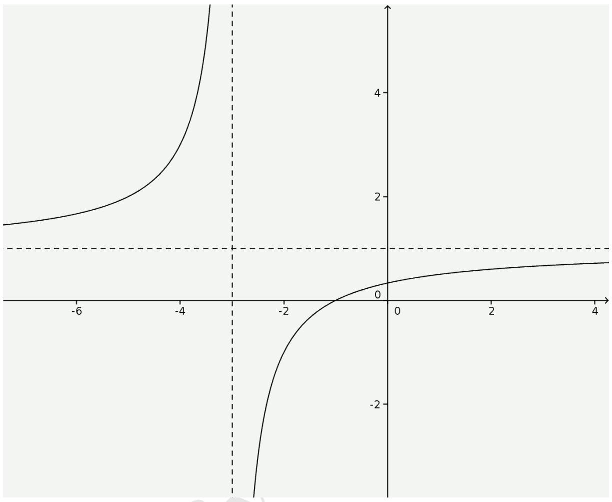
(a) Pueden aplicarse sucesivamente las siguientes transformaciones:

$$\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{1}{x+3} \longrightarrow \frac{2}{x+3} \longrightarrow -\frac{2}{x+3} \longrightarrow 1 - \frac{2}{x+3}$$

Es decir:

- Traslación en el eje OX
- Cambio de escala en el eje OY
- Simetría respecto a OX
- Traslación en el eje OY

(b) Es una función de proporcionalidad inversa. La gráfica es:



Las asíntotas son las rectas $y = 1$ y $x = -3$. Los puntos de intersección con los ejes son $(-1, 0)$ y $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

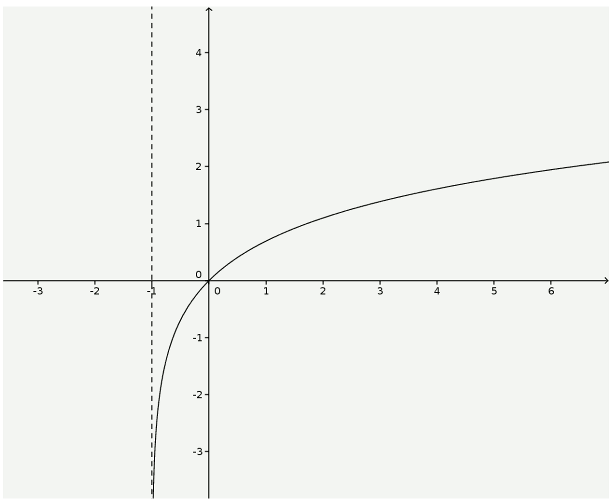
♠♠♠♠

Ejercicio 49. Representar la curva

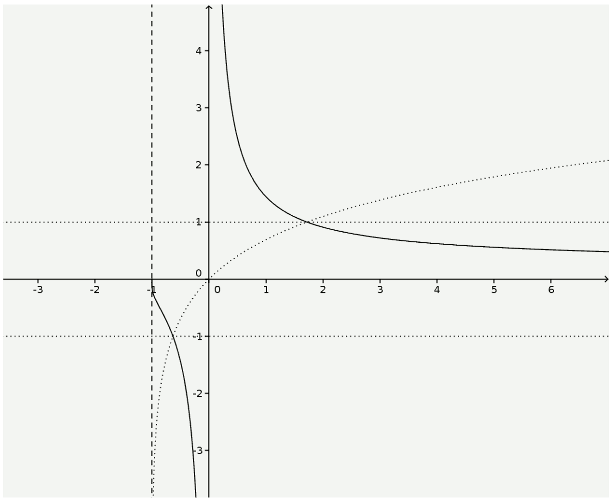
$$y = \frac{1}{\ln(x+1)}$$

Solución:

Primero representamos la curva $y = \ln(x+1)$ trasladando $y = \ln x$ una unidad hacia la izquierda:



Y después representamos la recíproca $y = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$:



♠♠♠♠

Tema 8

Límites de funciones. Continuidad

8.1. Límite cuando la variable tiende a infinito.

Cuando escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

queremos decir que cuando la variable x se hace muy grande los valores de la función son muy próximos al número l. Gráficamente sería así:

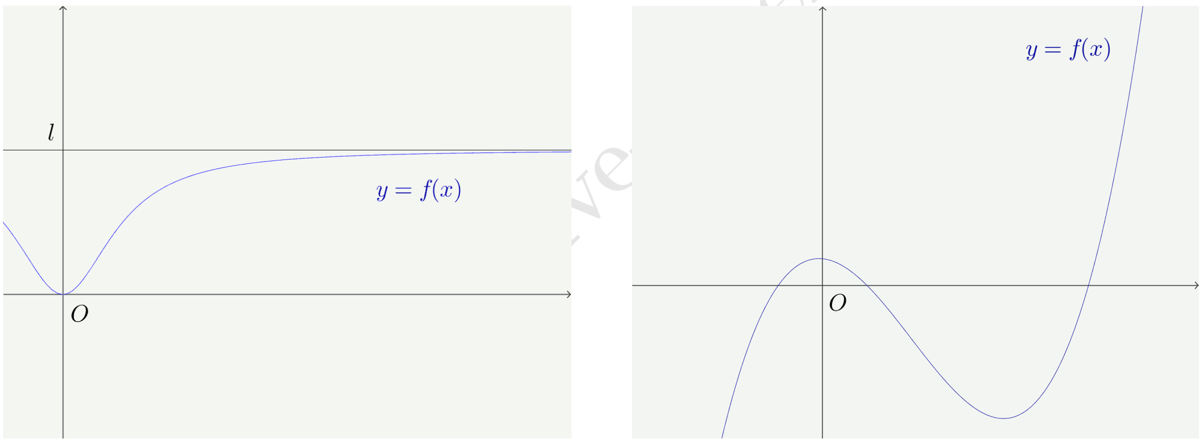


Figura 8.1: Límite cuando la variable tiende a infinito

Vemos que en este caso la gráfica de la función cuando x se hace muy grande se aproxima a la recta horizontal $x = l$. Veremos más adelante que esta recta se llama asíntota horizontal de la función (ver figura 8.1 izquierda).

Si el límite es infinito (y de modo muy parecido si es menos infinito) escribimos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

y significa que eligiendo x suficientemente grande la función toma valores tan grandes como se quiera, es decir, la gráfica de la función corta a cualquier recta horizontal (ver figura 8.1 derecha).

De forma más precisa (figura 8.1):

Definición 1 (Límite finito cuando $x \to \infty$)**.** *El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a infinito es l, y se escribe:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

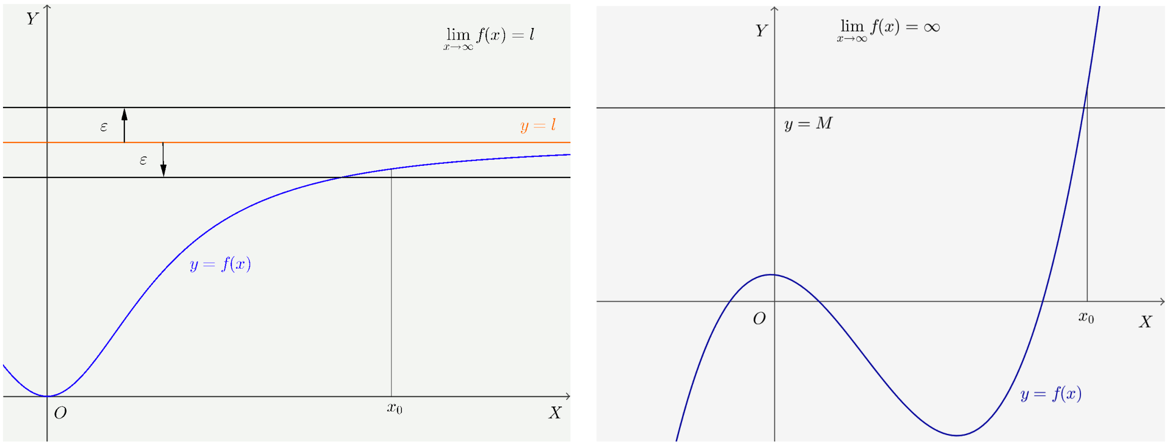


Figura 8.2: Límites cuando x tiende a infinito

si dado un número cualquiera ε mayor que cero, existe un valor de la variable x_0 tal que para los valores de x mayores que x_0, la distancia entre los valores de la función y el límite son menores que ε:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \quad | \quad x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definición 2 (Límite infinito cuando $x \to \infty$)**.** *Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando la variable x tiende a infinito es infinito y se escribe:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

si dado cualquier número M, existe un valor de la variable x_0 a partir del cual los valores de la función son mayores que M:

$$\forall M \quad \exists x_0 \quad | \quad x > x_0 \Longrightarrow f(x) > M$$

Los límites cuando la variable tiende a menos infinito se definen de modo similar.

Todas las reglas de cálculo de límites que hemos visto en el tema de sucesiones pueden aplicarse al cálculo de límites de funciones cuando la variable tiende a infinito.

Ejercicio 50. Calcular los siguientes límites:

$(d)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{x^3+4x}$ $\qquad (e)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x^2+1}{x^+x-2}$ $\qquad (f)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{1-x^3}{2x^3-3x^2+6}$

$(g)\ \lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ $\qquad (h)\ \lim_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^{x^2-3x}$ $\qquad (i)\ \lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2x+3}\right)^{x+1}$

$(j)\ \lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{3x+3}\right)^{5x+1}$ $\qquad (k)\ \lim_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x^2+3}\right)^{x} = e^0$ $\qquad (l)\ \lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x^2}$

$(m)\ \lim_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{2x+5}\right)^{x^2-1}$ $\qquad (n)\ \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-3}{3x+1}\right)^{x}$ $\qquad (ñ)\ \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+2}{2x+3}\right)^{x}$

Solución:

Aplicando las reglas que se vieron para los límites de sucesiones:

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+2}{x^3+4x} = 0$$

$$(b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^+x-2} = \infty$$

$$(c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{2x^3-3x^2+6} = -\frac{1}{2}$$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=e^{2}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^{2}}\right)^{x^{2}-3x}=e^{-3}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+3}\right)^{x+1}=e^{\frac{1}{2}}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x+3}\right)^{5x+1}=e^{\frac{10}{3}}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^{2}+3}\right)^{x}=e^{0}=1$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x^{2}}=\infty$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x+5}\right)^{x^{2}-1}=e^{-\infty}=0$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{3x+1}\right)^{x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\infty}=0$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{2x+3}\right)^{x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\infty}=\infty$

♠♠♠♠

8.2. Límite cuando la variable tiende a un número finito.

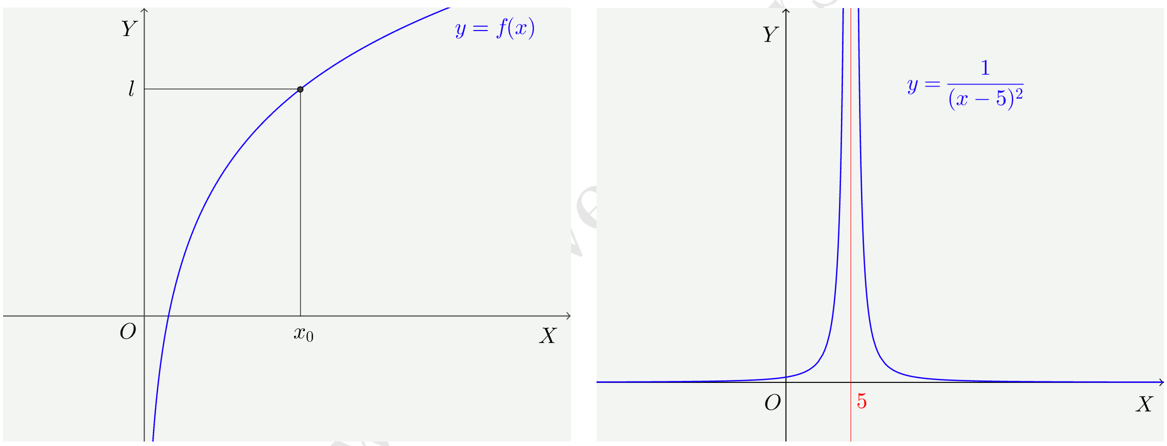


Figura 8.3: Limite cuando la variable tiende a un valor finito

Cuando escribimos

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

queremos decir que cuando la variable x toma valores próximos a x_0, pero distintos de x_0, la función $f(x)$ toma valores próximos a l (ver figura 8.3 izquierda). Es importante destacar que el límite de una función en un punto no depende del valor de la función en ese punto sino de los valores que toma en los puntos próximos. Para que haya límite, ni siquiera es necesario que exista la función en ese punto pero debe existir en los puntos próximos.

De forma más precisa (figura 8.4):

Definición 3 (Límite cuando $x\to x_0$)**.** *El límite cuando x tiende a x_0 de la función $f(x)$ es igual a l y se escribe:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

si $\quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta \quad | \quad |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$

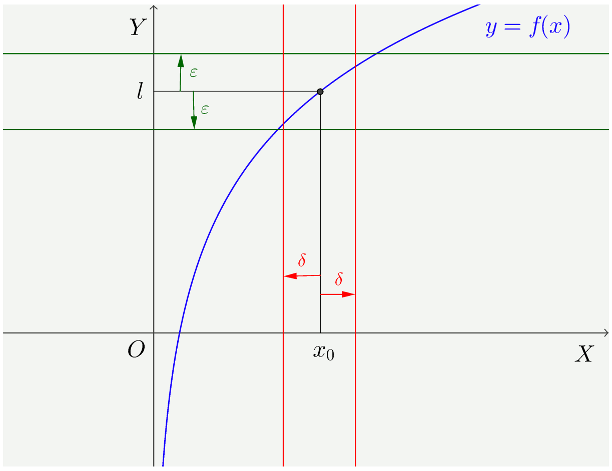


Figura 8.4: Límite cuando x tiende a un número finito

Si en los puntos próximos a x_0 la función toma valores muy grandes, mayores que cualquier número fijado previamente, diremos que la función tiende a infinito (ver figura 8.3 derecha).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

El límite igual a menos infinito se define de modo similar. Si el límite x tiende a x_0 es infinito (o menos infinito), la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la función.

8.3. Funciones continuas. Casos de discontinuidad.

Con las funciones que utilizamos habitualmente, si tienen límite finito, suele ocurrir que el límite de la función en un punto x_0 coincide con el valor de la función:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

En este caso se dice que la función es continua en x_0.

Destaquemos que para que una función sea continua en x_0 debe cumplirse que:

- Existe el límite de la función en el punto x_0.
- Existe la función en el punto x_0, es decir, el punto x_0 pertenece al dominio de la función.
- Ambos números $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $f(x_0)$ son iguales.

Cuando una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en ese punto. Pueden presentarse los siguientes casos:

◇ **Discontinuidad evitable.** Hemos dicho que el límite depende del valor que toma la función en los puntos próximos al punto pero es independiente del valor de la función en el punto. Así, es posible que una función tenga límite en el punto x_0 pero no exista la función en ese punto (o no coincida con el límite). En este caso se dice que la función presenta una discontinuidad evitable.

$$f \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

no está definida en el punto $x = 0$ (ver figura 8.5). Sin embargo puede demostrarse que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

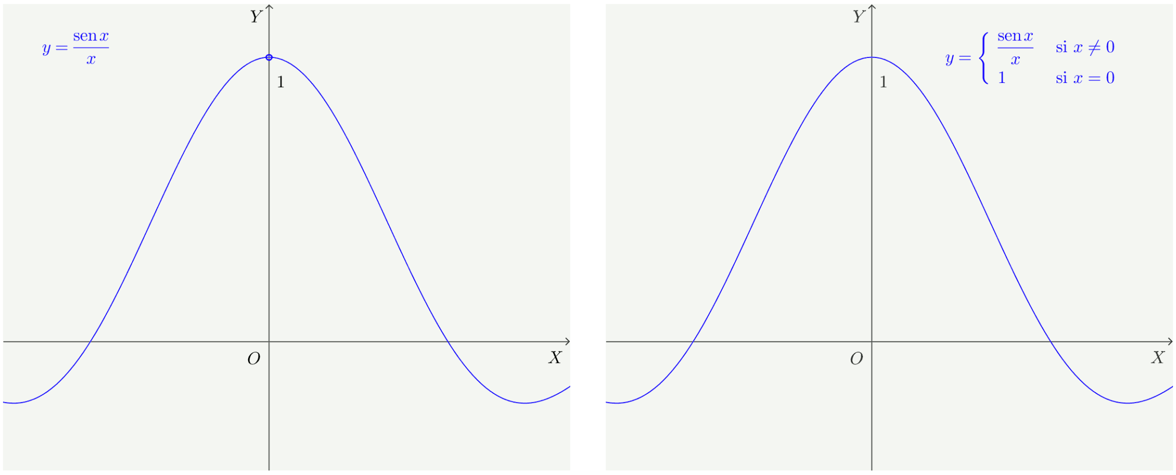


Figura 8.5: Discontinuidad evitable

Se llama discontinuidad evitable porque es posible darle un nuevo valor a la función en el punto de discontinuidad de modo que la nueva función así definida sea continua. Por ejemplo en la función anterior, definiendo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

obtenemos una función continua igual a la anterior en todos los puntos salvo en $x = 0$.

◇ **Salto finito.** Algunas funciones tienen límites diferentes según que la variable se aproxime al punto por la derecha o por la izquierda (ver figura 8.6). Los límites laterales se indican mediante:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \; ; \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

donde los superíndices $-$ y $+$ indican que x tiende a x_0 por la izquierda y por la derecha respectivamente. Que x tiende a x_0 por la izquierda significa que x es próximo a x_0 pero menor que x_0 y que x tiende a x_0 por la derecha significa que x es próximo a x_0 pero mayor que x_0.

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & x < 2 \\ x^2 - 4x + 8 & x \geq 2 \end{cases}$$

tiene un salto finito en $x = 2$, puesto que:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 1 \; ; \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 4$$

◇ **Infinitos.** El tercer tipo de discontinuidad son los infinitos de la función, es decir, los puntos x_0 tales que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

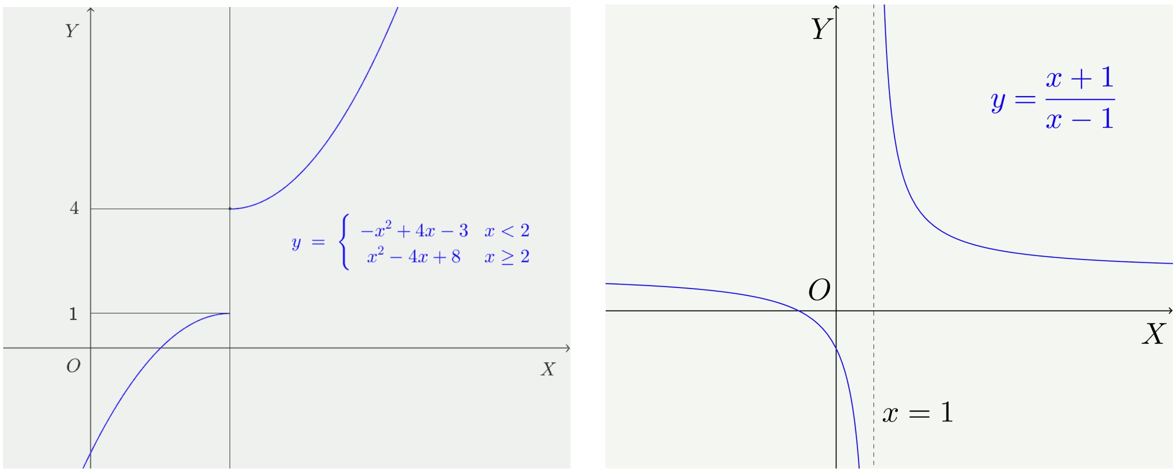


Figura 8.6: Discontinuidades por salto finito y por límite infinito

tiene un punto de discontinuidad en $x = 1$ ya que (ver figura 8.6):

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty$$

◇ **Discontinuidad esencial.** Se produce este tipo de discontinuidad cuando no existen los límites laterales ni son infinitos. Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

no tiene límite cuando x tiende a 0 (figura 8.7). Podemos ver que, cuando la variable es muy próxima a cero, la función oscila rápidamente entre -1 y 1 con una frecuencia que tiende a infinito a medida que x tiende a cero.

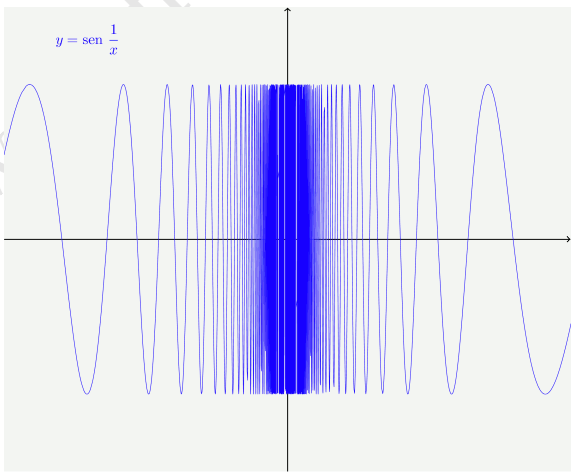


Figura 8.7: Discontinuidad esencial

Ejercicio 51. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3+x+2}{x^2-2x-3}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad dela función son $x = -1$ y $x = 3$.

El límite de la función cuando x tiende a -1 es:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x+2}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+2}{x-3} = -1$$

Puesto que existe el límite, en $x=-1$ la discontinuidad es evitable.

Cuando x tiende a 3:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3+x+2}{x^2-2x-3} = \infty$$

La función presenta un salto infinito en $x=3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 52. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x}{x-1} & x<0 \\ a & x=0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \end{cases}$$

determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$.

Solución:

Para que la función sea continua en $x=0$, su límite cuando x tiende a cero debe ser igual al valor de la función en cero. Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+3x}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

Así pues, el límite de la función es igual a cero. Si la función es continua, este límite debe coincidir con el valor de la función en cero. Por consiguiente a debe valer cero.

♠♠♠♠

8.4. Asíntotas.

Consideraremos tres tipos de asíntota:

- ◇ **Asíntotas verticales** (ver figura 8.6 derecha):

  $$x=x_0 \text{ asíntota vertical de } f(x) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

  Por ejemplo la función:

  $$y = \frac{x+1}{x-1}$$

  tiene una asíntota $x=1$ puesto que:

  $$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty$$

- ◇ **Asíntotas horizontales** (ver figura 8.8 izquierda):

  $$y=y_0 \text{ asíntota horizontal de } f(x) \iff \lim_{x\to \infty} f(x) = y_0$$

  Por ejemplo, $y=0$ es una asíntota horizontal de la función $y=\dfrac{5x}{x^2+7}$ porque:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x^2+7} = 0$$

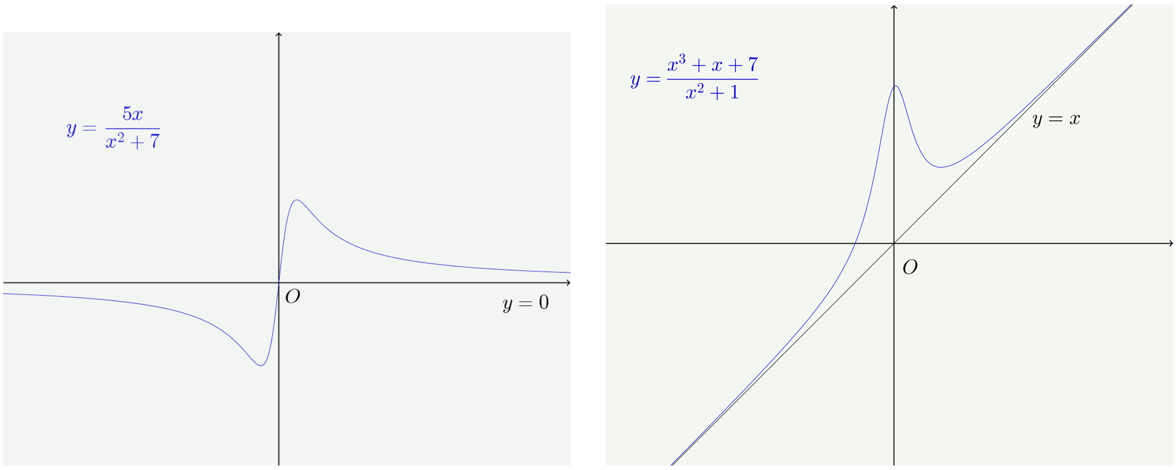


Figura 8.8: Asíntota horizontal y oblicua

◇ **Asíntotas oblicuas** (ver figura 8.8 derecha):

$$y = mx + b \text{ asíntota oblicua de } f(x) \iff \lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0$$

Puesto que y (la ordenada de la asíntota) y $f(x)$ son iguales cuando x tiende a infinito, podemos calcular la pendiente m de la asíntota, del siguiente modo:

$$y = mx + b \implies m = \frac{y-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Una vez calculada la pendiente, se obtiene la ordenada en el origen b:

$$y = mx + b \implies b = y - mx = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

Por ejemplo, para obtener la asíntota de la función:

$$f(x) = \frac{x^3+x+7}{x^2+1}$$

se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3+x+7}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \cdot \frac{x^3+x+7}{x^3+x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x+7}{x^2+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+7-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{x^2+1} = 0$$

de forma que la asíntota es $y = x$.

Ejercicio 53. Calcular las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$.

Solución:

Cuando x tiende a infinito, la pendiente de la asíntota es:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x} = 1$$

y su ordenada en el origen:

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-4x-5} - x \right) = -2$$

La asíntota oblicua por la derecha es $y = x - 2$.

De forma similar, cuando x tiende a $-\infty$ la pendiente de la asíntota es:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x} = -1$$

y su ordenada en el origen:

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x - 5} + x\right) = 2$$

La asíntota oblicua por la izquierda es $y = -x + 2$.

♠♠♠♠

8.5. Nueva definición de continuidad

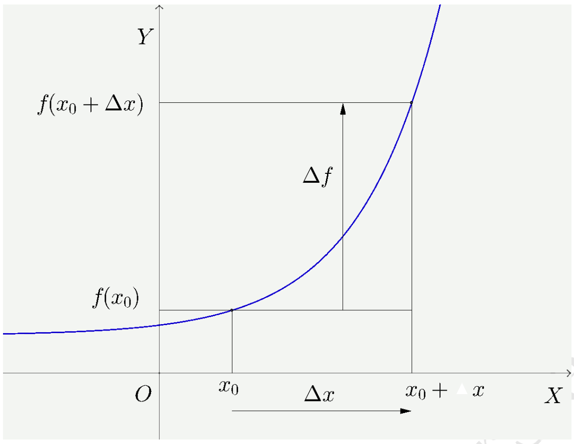


Figura 8.9: Función continua

Llamemos $x = x_0 + \Delta x$ (figura 8.9):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0
\end{aligned}$$

donde se ha llamado Δf a la variación de la función f cuando la variable x cambia en la cantidad Δx. Esta nueva definición puede expresarse de la siguiente forma: *una función es continua, si a variaciones infinitesimales de la variable dependiente, corresponden variaciones infinitesimales de la variable dependiente.*

8.6. Reglas para el cálculo de límites

Límites cuando $x \to \infty$

Reglas generales: Para calcular estos límites pueden aplicarse las siguientes reglas:

$$\infty \pm k = \infty \qquad k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0) \qquad \frac{\infty}{k} = \infty \qquad \frac{k}{0} = \infty$$

$$\infty^k = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases} \qquad r^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

Cuando no se pueden aplicar esas reglas, los límites se llaman indeterminados y es preciso aplicar otros procedimientos. Son límites indeterminados los del tipo:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty \qquad 0^0$$

Funciones polinómicas y racionales: Las indeterminaciones que se presentan se resuelven teniendo en cuenta solamente los términos de mayor grado de cada polinomio. Para calcular el límite de la diferencia de dos fracciones que tienden a infinito se hace previamente la resta.

Otras funciones: Si hay que comparar infinitos de distintos tipos en indeterminaciones del tipo ∞/∞ o $\infty - \infty$ se tiene en cuenta que los infinitos más grandes son los exponenciales (a^x), después los potenciales (x^n) y finalmente los logarítmicos ($\log_a x$)

Límites cuando x tiende a un número c

Regla general: Se aplica la definición de función continua, es decir, se sustituye x por c.

Límites infinitos: Si al calcular el límite de una fracción por el procedimiento anterior, el denominador es cero y el numerador es distinto de cero, el límite es infinito. Para saber si es $+\infty$ o $-\infty$, se calculan los límites laterales.

Límites indeterminados: Si al calcular el límite de un cociente de polinomios resulta que, tanto el numerador como el denominador tienden a cero (indeterminación del tipo $0/0$), puede resolverse esta indeterminación dividiendo numerador y denominador por $x - c$.

8.7. Dos límites importantes

El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

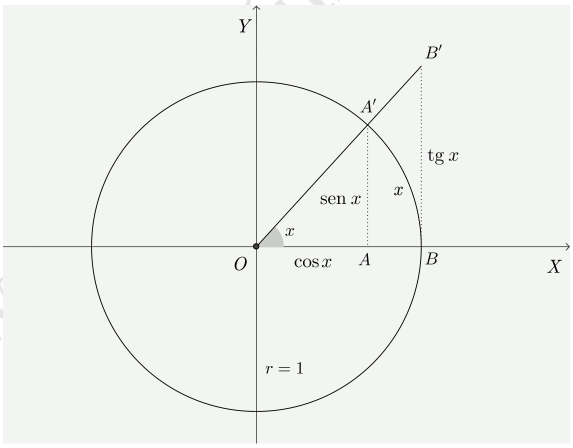


Figura 8.10: Límite de $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

En la figura 8.10 se ha representado un ángulo x sobre una circunferencia de radio 1. Si el radio es igual a la unidad, la longitud del arco coincide con la medida del ángulo en radianes. El seno y el coseno del ángulo son iguales a la ordenada y la abscisa del extremo del arco y así se han representado en la figura. También se ha representado un segmento de longitud igual a $\operatorname{tg} x$.

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

y dividiendo por $\operatorname{sen} x$:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \quad \Longrightarrow \quad 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Cuando $x \to 0$:

$$1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

y también:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{1} = 1$$

El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

La base de los logaritmos neperianos (ln) es el número e. Este número se define como el límite de la siguiente función:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

o cambiando x por $1/x$:

$$e = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

Aplicaciones al cálculo de límites

El hecho de que los dos límites que acabamos de calcular sean iguales a 1 quiere decir que cuando x es próximo a 0, las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\ln(1+x)$ son aproximadamente iguales a x. Esto lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\text{si } x \to 0 \quad \operatorname{sen} x \sim x \quad \text{y} \quad \ln(1+x) \sim x$$

A partir de estas aproximaciones podemos obtener valores aproximados para otras funciones cuando $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &\sim x \\ \operatorname{arsen} x &\sim x \\ \operatorname{artg} x &\sim x \\ 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\ e^x - 1 &\sim x \\ (1 \pm x)^n &\sim 1 \pm nx \end{aligned}$$

Estas aproximaciones pueden utilizarse para calcular límites. Pueden cometerse errores si se sustituye una función por su equivalente en una diferencia y el resultado es cero.

A partir del límite del logaritmo puede obtenerse una expresión útil para calcular límites indeterminados del tipo 1^∞. Hemos visto que:

$$x \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln(1+x) \sim x$$

Si llamamos $1 + x = u$ esto es equivalente a:

$$u \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln u \sim u - 1$$

Ahora supongamos que $u \to 1$ y $v \to \infty$:

$$u \to 1, \quad v \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim u^v = e^{v \ln u} = e^{\lim (u-1)v}$$

Tema 9

Derivadas

9.1. Función derivada

En temas anteriores se ha explicado el concepto de pendiente de una recta. Dada una recta $y = mx + b$, la pendiente m es el cociente de las variaciones de y y de x entre dos puntos cualesquiera de la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esta idea puede generalizarse para una curva $y = f(x)$ de la forma que veremos a continuación. La diferencia fundamental es que la pendiente de la curva que llamaremos derivada no es constante sino que varía de un punto a otro de la curva.

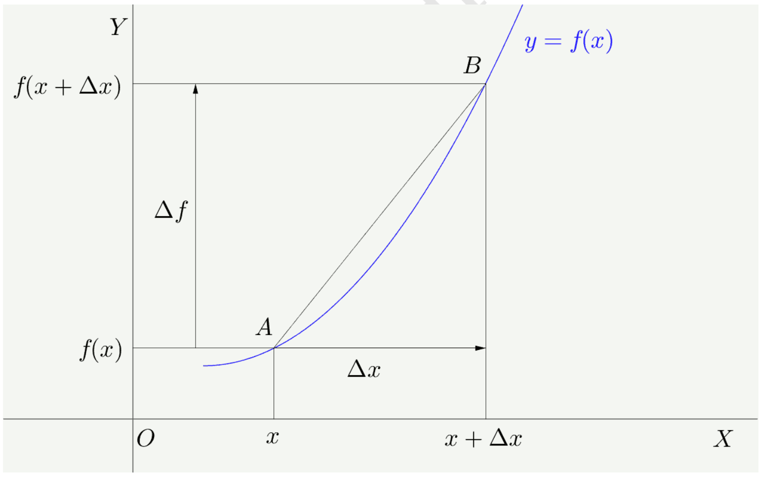


Figura 9.1: Derivada de una función

Sea una función f. Su representación gráfica es la curva de ecuación $y = f(x)$. Sean A y B dos puntos de la curva de abscisas x y $x + \Delta x$ (ver figura 9.1). Cuando la variable independiente cambia en una cantidad Δx, la función varía en la cantidad:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

La **tasa de variación media** de la función en este intervalo, o **pendiente media** de la curva correspondiente se define como el cociente de los incrementos de la función y de la variable entre los dos puntos de la curva:

$$m_{AB} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La pendiente de la curva en un punto se define mediante un paso al límite.

La **tasa de variación instantánea** de una función o **pendiente de la curva** en un punto es la tasa de variación media entre dos puntos cuando la distancia entre ellos tiende a cero, es decir, el límite de la expresión anterior cuando Δx tiende a cero:

$$m_A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Veamos con más precisión el significado de la pendiente de una curva. La **tangente** a una curva en un punto A es la recta que une dos puntos de la curva A y B cuando la distancia entre ambos tiende a cero. La pendiente media de una curva entre dos puntos A y B, es la pendiente de la recta que une los dos puntos de la curva (ver figura 9.2). Al aproximarse los dos puntos, la pendiente media pasa a ser la pendiente en el punto A, y la recta AB se transforma en la tangente a la curva en el punto A. Así pues, la pendiente de una curva es la pendiente de la recta tangente a la curva.

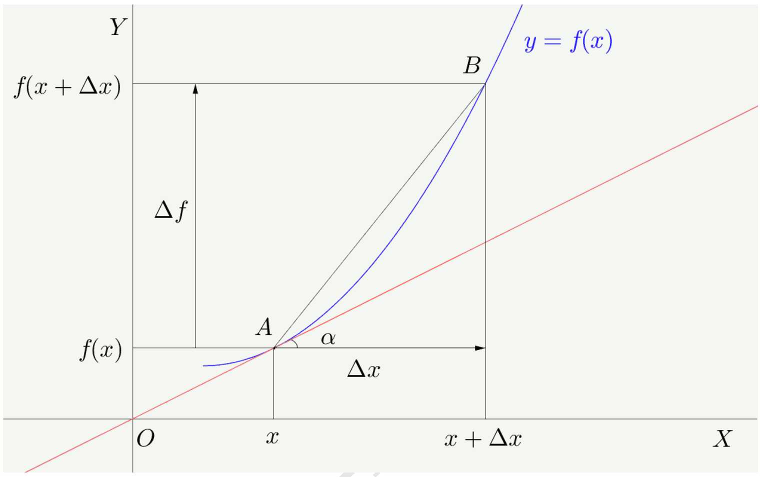


Figura 9.2: Interpretación geométrica de la derivada

De forma general, la **derivada** de la función $f(x)$ en un punto cualquiera x se define como el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El incremento de la variable se suele representar también por h o por $\mathrm{d}x$. La derivada de la función $f(x)$ se representa por $f'(x)$ y también por $\mathrm{D}\, f(x)$ o $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

La derivada de una función debe interpretarse geométricamente como la pendiente de la curva que representa la función o como la pendiente de la recta tangente a esa curva.

Ejercicio 54. Calcular la derivada de la función $y = x^2$.

Solución:

De acuerdo con la definición:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

♠♠♠♠

Teorema 3. *Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.*

Demostración. En efecto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) \cdot \Delta x = 0$$

□

El recíproco no es cierto, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y, sin embargo, no es derivable en ese punto.

Ejercicio 55. Demostrar que la función $y = \sqrt[3]{x^2}$ no es derivable en $x = 0$.

Solución:

Esta función es continua en todo su dominio puesto que se trata de una función potencial. Veamos que no tiene derivada en $x = 0$. La función derivada es:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+h)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{h}$$

En el punto de abscisa $x = 0$:

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{(0+h)^2} - \sqrt[3]{0^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \infty$$

♠♠♠♠

Puesto que la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada de la función en el punto, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 (y ordenada $f(x_0)$) es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ejercicio 56. Calcular la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto de abscisa $x_0 = \frac{1}{3}$.

Solución:

La ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto. En un ejercicio anterior calculamos la función derivada $y' = 2x$. La pendiente de la tangente es:

$$m = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Conocido el punto y la pendiente, puede calcularse la ecuación de la tangente. En la forma punto-pendiente:

$$y - \frac{1}{9} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

♠♠♠♠

9.2. Reglas de derivación

Las derivadas de las funciones elementales pueden obtenerse a partir de la definición; los límites pueden calcularse con ayuda de las técnicas que se han visto en el tema anterior. A continuación se deducen algunas de estas derivadas:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\sqrt{x} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Se ha multiplicado numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador para poder efectuar la diferencia.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\ln x &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\,\frac{\cancel{h}}{x}\\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Se ha aplicado la aproximación $\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\sim\frac{h}{x}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\operatorname{sen} x &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\operatorname{sen}\frac{x+h-x}{2}}{h} =\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2}\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\frac{\cancel{h}}{\cancel{2}}}{\cancel{h}}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2} = \cos x
\end{aligned}
$$

Donde se ha aplicado la aproximación $\operatorname{sen}\frac{h}{2}\sim\frac{h}{2}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\,e^x &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h-e^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cancel{h}}{\cancel{h}}\\
&= e^x
\end{aligned}
$$

Aquí hemos tenido en cuenta la aproximación $e^h-1\sim h$.

A partir de las propiedades de los límites y de la continuidad de las funciones derivables pueden demostrarse las siguientes propiedades:

- ⋄ Suma y diferencia de funciones: $\mathrm{D}\,(u\pm v)=u'\pm v'$
- ⋄ Producto de funciones: $\mathrm{D}\,(u\cdot v)=u'v+v'u$
- ⋄ Cociente de funciones: $\mathrm{D}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
- ⋄ Función compuesta: $\mathrm{D}\,f[g(x)]=f'[g(x)]\,g'(x)$

En la tabla 9.1, en la que hemos representado mediante u y v funciones cualesquiera de x y mediante K una constante, se recogen las reglas de derivación:

REGLAS GENERALES	FUNCIONES SIMPLES	FUNCIONES COMPUESTAS
	$\mathrm{D}[K]=0$	
$\mathrm{D}[u \pm v]=u' \pm v'$	$\mathrm{D}[x^n]=nx^{n-1}$	$\mathrm{D}[u^n]=nu^{n-1}u'$
	$\mathrm{D}[\ln x]=\dfrac{1}{x}$	$\mathrm{D}[\ln u]=\dfrac{1}{u}u'$
$\mathrm{D}[Ku]=Ku'$	$\mathrm{D}[\log_a x]=\dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{D}[\log_a u]=\dfrac{1}{u\ln a}u'$
	$\mathrm{D}[e^x]=e^x$	$\mathrm{D}[e^u]=e^u u'$
$\mathrm{D}[uv]=u'v+v'u$	$\mathrm{D}[a^x]=a^x\ln a$	$\mathrm{D}[a^u]=a^u(\ln a)u'$
	$\mathrm{D}[\operatorname{sen} x]=\cos x$	$\mathrm{D}[\operatorname{sen} u]=(\cos u)u'$
$\mathrm{D}\left[\dfrac{u}{v}\right]=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$\mathrm{D}[\cos x]=-\operatorname{sen} x$	$\mathrm{D}[\cos u]=(-\operatorname{sen} u)u'$
	$\mathrm{D}[\operatorname{tg} x]=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{D}[\operatorname{tg} u]=\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$
$\mathrm{D}[f(u)]=f'(u)u'$	$\mathrm{D}[\operatorname{arsen} x]=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{D}[\operatorname{arsen} u]=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
	$\mathrm{D}[\arccos x]=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{D}[\arccos u]=\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
	$\mathrm{D}[\operatorname{artg} x]=\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{D}[\operatorname{artg} u]=\dfrac{1}{1+u^2}u'$

Tabla 9.1: Reglas de derivación

Ejercicio 57. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

- $y=x^3-3x^2+7x-10$

  $$y'=3x^2-6x+7$$

- $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$

  $$y'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

- $y=\operatorname{sen}^2 x$

  $$y'=2\operatorname{sen} x\cos x$$

- $y=\operatorname{sen}(x^2)$

  $$y'=\cos(x^2)\cdot 2x$$

- $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

  $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)$$

- $y=x^x=e^{x\ln x}$

  $$y'=e^{x\ln x}\left(\ln x+\frac{1}{x}x\right)=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

♠♠♠♠

9.3. Funciones crecientes y decrecientes

Una función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo si a valores mayores de la variable corresponden valores mayores de la función:

$$f \text{ creciente} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

De forma similar, una función $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo si a valores mayores de la variable corresponden valores menores de la función:

$$f \text{ decreciente} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Los puntos en que la función pasa de creciente a decreciente o de decreciente a creciente se llaman,

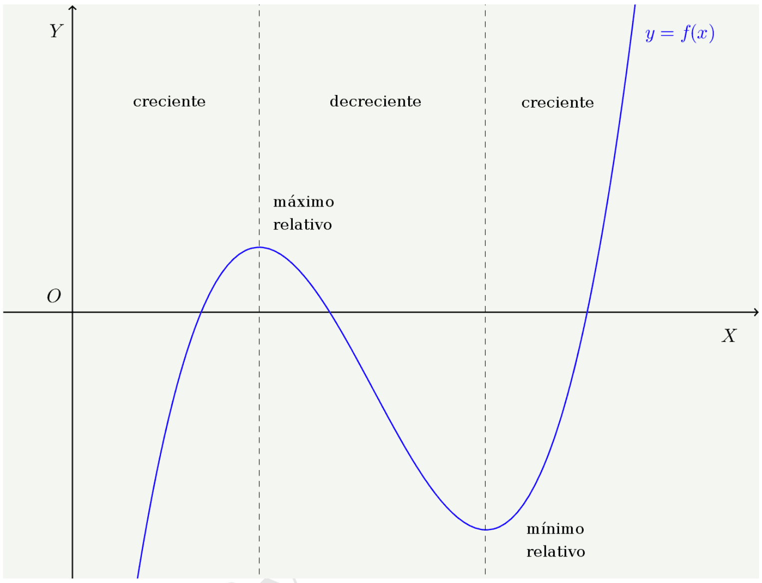


Figura 9.3: Intervalos de crecimiento y decrecimiento

respectivamente, **máximos y mínimos relativos** o **máximos y mínimos locales** (ver figura 9.3).

La derivada de la función permite obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para funciones derivables se cumple el siguiente teorema:

Teorema 4. *Si la derivada de la función $f(x)$ es positiva (negativa) en x_0, la función es creciente (decreciente) en x_0:*

$$f'(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ creciente en } x_0; \qquad f'(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ decreciente en } x_0$$

y como consecuencia, la derivada en los máximos y mínimos relativos debe ser cero.

Según el teorema anterior, los máximos y mínimos relativos de la función deben buscarse entre los puntos de derivada cero. Sin embargo, esto no significa que todos los puntos de derivada cero sean máximos o mínimos.

Geométricamente, el que la derivada en un punto sea cero quiere decir que en ese punto la recta tangente es paralela al eje de abscisas, son puntos de tangente horizontal. Pueden darse varios casos (ver figura 9.4).

Sea $f'(x_0) = 0$. Para determinar el comportamiento de la función en ese punto podemos utilizar el siguiente criterio:

- ◇ Si la función es creciente a la izquierda y a la derecha de x_0, la función es creciente en x_0.
- ◇ Si la función es decreciente a la izquierda y a la derecha de x_0, la función es decreciente en x_0.

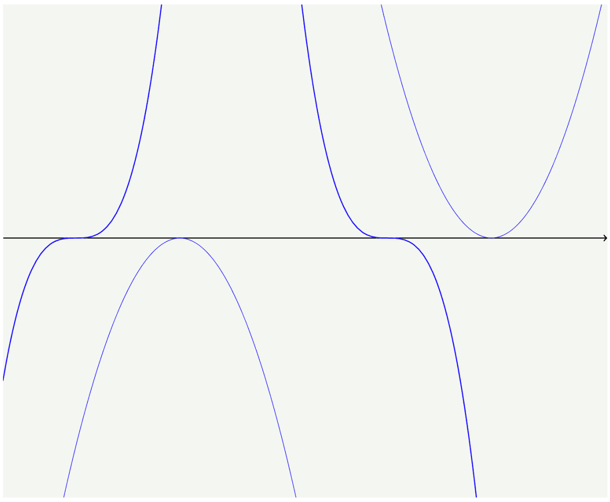


Figura 9.4: Puntos de derivada cero

- Si la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de x_0, la función presenta un máximo relativo en x_0.

- Si la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha de x_0, la función presenta un mínimo relativo en x_0.

También podemos hacer uso de los siguientes teoremas:

Teorema 5. *Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, x_0 la función presenta un máximo relativo en x_0.*

Demostración. Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f'(x)$ es decreciente en x_0. Puesto que en ese punto la derivada es cero, $f'(x)$ deberá ser positiva a la izquierda y negativa a la derecha. La función pasa de creciente a decreciente y, por consiguiente, tiene un máximo en x_0. □

De forma similar:

Teorema 6. *Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, x_0 la función presenta un mínimo relativo en x_0.*

Ejercicio 58. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función:

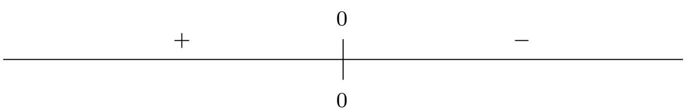
$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = -xe^{-x}$$

El signo de la derivada lo podemos expresar mediante el siguiente esquema:



Así pues, la función es creciente en $(-\infty, 0)$, tiene un máximo en $x = 0$ y es decreciente en $(0, \infty)$.

♠♠♠♠

9.4. Concavidad y convexidad

Una función $f(x)$ es **cóncava** en el punto x_0 si en los puntos próximos a x_0 la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 queda por debajo de ella:

$$f \text{ cóncava en } x_0 \Rightarrow f(x) - y_t = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] > 0$$

Una función $f(x)$ es **convexa** en el punto x_0 si en los puntos próximos a x_0 la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 queda por encima de ella:

$$f \text{ convexa en } x_0 \Rightarrow f(x) - y_t = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] < 0$$

Teorema 7. *Si $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es cóncava en x_0*

Teorema 8. *si $f''(x_0) < 0$, la función $f(x)$ es convexa en x_0*

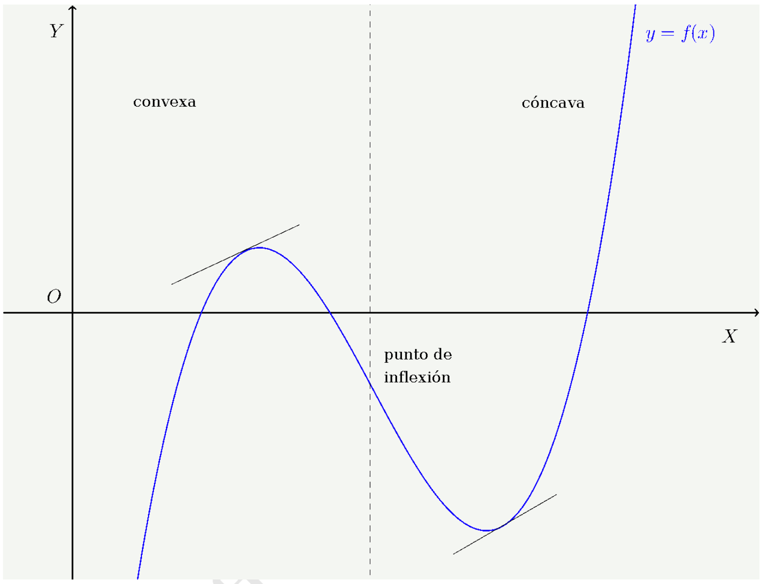


Figura 9.5: Concavidad y convexidad

Los puntos en que la función no es cóncava ni convexa se llaman **puntos de inflexión** de la función. En esos puntos la derivada segunda es igual a cero.

Teorema 9. *si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, x_0 es un punto de inflexión.*

Ejercicio 59. Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{(6x + 5)(x + 5) - (3x^2 + 5x - 20)}{(x + 5)^2} = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3 \cdot \frac{(2x + 10)(x + 5)^2 - 2(x + 5)(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^4} \\ &= 3 \cdot \frac{(2x + 10)(x + 5) - 2(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^3} \\ &= 3 \cdot \frac{20}{(x + 5)^3} \end{aligned}$$

El signo de esta fracción depende solamente del denominador. La función es convexa para $x < -5$ y es cóncava para $x > -5$. En $x = -5$ hay una asíntota vertical.

♠♠♠♠

9.5. Diferencial de una función

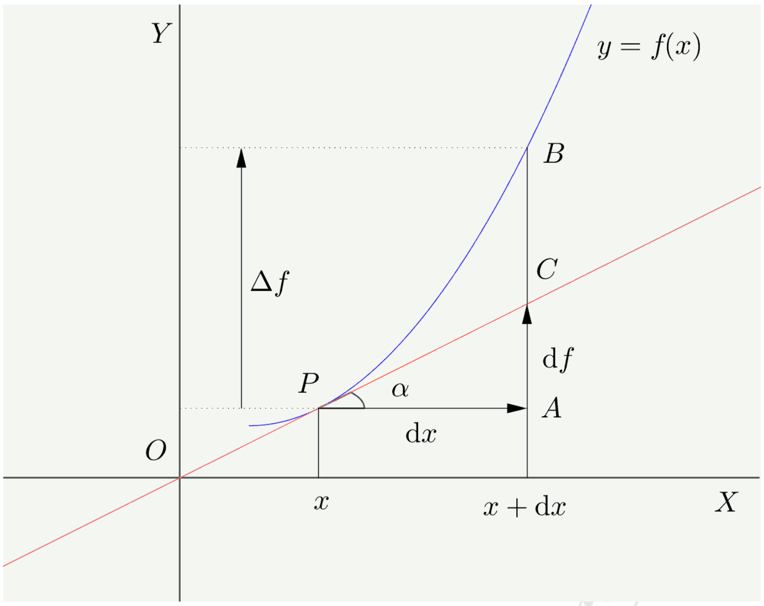


Figura 9.6: Diferencial de una función

En la figura 9.6 se ha representado una función derivable $f(x)$ así como la tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto cualquiera de abscisa x. Si se incrementa la variable en una cantidad $\mathrm{d}x$ la función cambia en una cantidad Δf.

Se llama diferencial de la función $\mathrm{d}f$ al producto de la derivada por el incremento de la variable:

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Geométricamente, la diferencial es el incremento sobre la recta tangente correspondiente al incremento $\mathrm{d}x$ de la variable.

El incremento de la variable lo hemos representado por Δx o por $\mathrm{d}x$, es decir Δx y $\mathrm{d}x$ es lo mismo. Sin embargo, en general, Δf y *df* son números distintos. En la figura 9.6 Δf es igual a la longitud del segmento AB mientras que $\mathrm{d}f$ es igual a AC.

Pese a ser diferentes Δf y *df* son muy próximos para valores pequeños de dx. Así, la diferencia $\Delta f - \mathrm{d}f$ tiende a cero más rápidamente que $\mathrm{d}x$ cuando $\mathrm{d}x$ tiende a cero:

$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right) = f'(x) - f'(x) = 0$$

Es por esta razón que se suele interpretar $\mathrm{d}f$ como el incremento de la función correspondiente a un incremento infinitesimal de la variable $\mathrm{d}x$.

9.6. Propiedades de las funciones derivables

Teorema 10 (Teorema de Rolle)**.** *Sea f una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y que cumple que $f(a)=f(b)$. Entonces, existe un punto de (a,b) en el que la derivada vale cero.*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [a,b] \\[2ex] f \text{ derivable en } (a,b) \\[2ex] f(a)=f(b) \end{array}\right\} \implies \exists \xi \in (a,b) \mid f'(\xi)=0$$

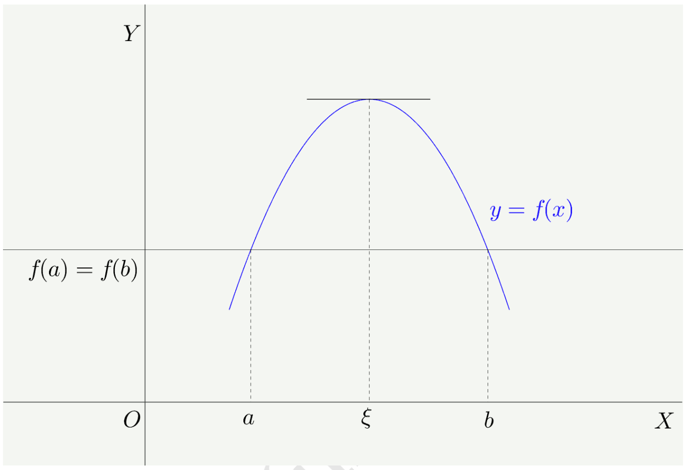


Figura 9.7: Teorema de Rolle

Geométricamente, el teorema de Rolle significa que en una curva, entre dos puntos de de igual ordenada, debe haber al menos un punto de tangente horizontal.

El teorema de Rolle se deduce fácilmente del teorema de Weierstrass: por ser la función f continua en $[a,b]$ tiene un máximo y un mínimo absoluto en ese intervalo. Pueden darse dos casos:

- ⋄ Que el máximo y el mínimo absolutos se encuentren en los extremos del intervalo. Como la función toma el mismo valor en los dos extremos el máximo y el mínimo serán iguales y, por consiguiente, la función será constante. En este caso el teorema se cumple porque una función constante tiene derivada cero en todos sus puntos.
- ⋄ Que o bien el máximo o bien el mínimo absoluto se encuentre en el interior del intervalo. En este caso el máximo o mínimo absoluto será a su vez máximo o mínimo relativo y la derivada en ese punto será cero (ver figura 9.7).

Como consecuencia del teorema de Rolle resultan las siguientes propiedades:

- ⋄ Si f es una función derivable entre dos ceros de la función debe haber al menos un cero de la derivada.
- ⋄ Si la derivada no tiene ceros, la funciones tiene a lo sumo un cero.

Teorema 11 (Teorema del valor medio, de Lagrange o de los incrementos finitos)**.** *Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe un punto $\xi \in (a,b)$ que cumple que:*

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$$

Demostración. Escojamos λ de forma que la función $F(x)=f(x)-\lambda x$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle. Desde luego, se cumplen las condiciones de continuidad y derivabilidad. Para que se cumpla la tercera condición:

$$F(a) = f(a) - \lambda a$$
$$F(b) = f(b) - \lambda b$$

$$F(a) = F(b) \implies f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \implies \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Para este valor de λ, como consecuencia del teorema de Rolle, existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \lambda = 0 \implies f'(\xi) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$$

$\square$

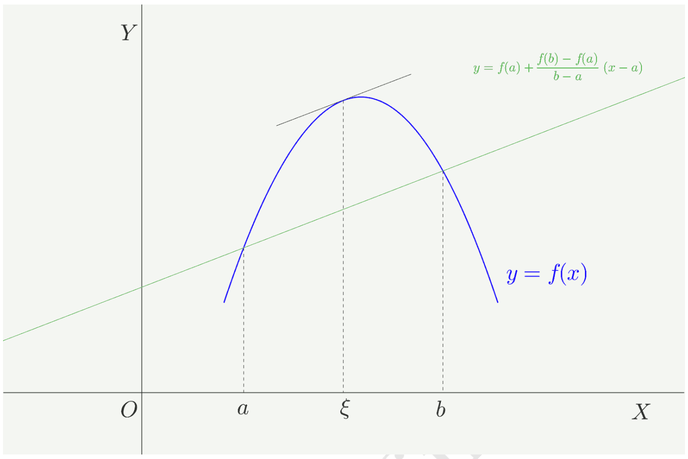


Figura 9.8: Teorema del valor medio

Consecuencias del teorema del valor medio:

– Si $f'(x) > 0$ en (a, b), $f(x)$ es creciente en (a, b). En efecto, sean x_1, x_2, dos puntos del intervalo (a, b). Aplicando el teorema del valor medio:

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad \text{puesto que } f'(\xi) > 0$$
$$f(x_2) > f(x_1)$$

De la misma forma se demuestra que si $f'(x) < 0$ la función es decreciente.

– Si una función tiene derivada cero en un intervalo (a, b) es constante en ese intervalo o, lo que es lo mismo, toma el mismo valor en todos sus puntos.

En efecto, sean x_1 y x_2 dos puntos del intervalo (a, b). En el intervalo $[x_1, x_2]$ la función cumple las condiciones del teorema del valor medio de forma que:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)\,; \qquad \xi \in (x_1, x_2)$$

y como la derivada es cero en el intervalo, resulta $f(x_2) = f(x_1)$.

– Si dos funciones tienen la misma derivada, su diferencia es constante.

En efecto, si $f'(x) = g'(x)$, la diferencia $F(x) = f(x) - g(x)$ tiene derivada cero y de acuerdo con el apartado anterior es constante.

Teorema 12 (Teorema de Cauchy)**.** *Sean f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos además que la derivada de g no se anula en el intervalo (a, b). Existe un punto $\xi \in (a, b)$ que cumple que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Demostración. En efecto, el denominador del segundo miembro es distinto de cero y también el del primer miembro puesto que, por el teorema del valor medio:

$$g(b) = g(a) + g'(c)(b-a) \neq g(a)$$

Formemos la función:

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

y escojamos λ de forma que pueda aplicarse el teorema de Rolle a $F(x)$. Para ello:

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a)$$
$$F(b) = f(b) - \lambda g(b)$$

$$F(a) = F(b) \quad \Longrightarrow \quad f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Como consecuencia del teorema de Rolle, existe un $\xi \in (a,b)$ tal que $F'(\xi) = 0$. Es decir:

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

Teorema 13 (Regla de l'Hopital)**.** *Sean f y g funciones continuas y derivables en un entorno del punto x_0. Supongamos que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y que la derivada de g no se anulan en un entorno reducido de x_0. Entonces:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración. En efecto, puesto que $f(x_0) = g(x_0) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} && \text{(por el teorema de Cauchy)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} && \text{(puesto que existe el límite de } \tfrac{f'(x)}{g'(x)}\text{)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

La justificación del último paso de la demostración es el siguiente: ξ es un número comprendido entre x y x_0, de forma que, cuando x tiende a x_0 también ξ tiende a x_0. Entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

9.7. Teorema de Taylor

Sea f una función n veces derivable en el punto $x = a$. El polinomio de Taylor de grado n de esta función en ese punto (también llamado desarrollo de Taylor en el punto) es un polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

tal que:

$$\begin{aligned} P(a) &= f(a) \\ P'(a) &= f'(a) \\ P''(a) &= f''(a) \\ \ldots &\quad \ldots \\ P^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Es fácil ver que, para que se cumpla esto, el polinomio debe ser:

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

El desarrollo de Taylor de una función en torno al punto $a = 0$ se llama desarrollo de McLaurin. Así, el polinomio de McLaurin de la función f sería:

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ejercicio 60. Obtener el desarrollo de McLaurin de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Todas las derivadas de la función exponencial son iguales a e^x. Por consiguiente, las derivadas en el punto $x = 0$ valen 1. El desarrollo es:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

Las derivadas de la función seno son:

$y' = \cos x$	$y'(0) = 1$	$y'' = -\operatorname{sen} x$	$y''(0) = 0$
$y''' = -\cos x$	$y'''(0) = -1$	$y^{(4)} = \operatorname{sen} x$	$y^{(4)}(0) = 0$
$y^{(5)} = \cos x$	$y^{(5)}(0) = 1$	$y^{(6)} = -\operatorname{sen} x$	$y^{(6)}(0) = 0$

Y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 0 = 0$ el desarrollo queda:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$$

Procediendo de la misma manera con la función coseno:

$y' = -\operatorname{sen} x$	$y'(0) = 0$	$y'' = -\cos x$	$y''(0) = -1$
$y''' = \operatorname{sen} x$	$y'''(0) = 0$	$y^{(4)} = \cos x$	$y^{(4)}(0) = 1$
$y^{(5)} = -\operatorname{sen} x$	$y^{(5)}(0) = 0$	$y^{(6)} = -\cos x$	$y^{(6)}(0) = -1$

Puesto que, además, $\cos 0 = 1$, el desarrollo del coseno es:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

Obsérvese que en el desarrollo de la función seno que es impar solamente hay potencias impares y en la función coseno (par) solamente hay exponentes pares.

♠♠♠♠

El teorema de Taylor permite estimar el error que se comete al sustituir una función por su polinomio de Taylor.

Teorema 14 (Teorema de Taylor). *Sea $f(x)$ una función $n+1$ veces derivable en un entorno del punto $x = a$. En estas condiciones, existe un punto ξ comprendido entre a y x tal que:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Es decir, la diferencia entre una función y su polinomio de Taylor de grado n puede expresarse como:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ ; \qquad \xi \in (a, x)$$

Demostración. Vamos a aplicar reiteradamente el teorema de Cauchy a las funciones $F(x) = f(x) - P(x)$ y $G(x) = (x-a)^{n+1}$. La primera función es la diferencia entre la función $f(x)$ y su polinomio de Taylor en el punto a. Ambas funciones y sus n primeras derivadas son nulas en el punto a. Entonces, por el teorema de Cauchy:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \qquad \xi_1 \in (a, x)$$

Volvemos a aplicar el teorema de Cauchy. Puesto que las derivadas son cero en el punto a:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \qquad \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x)$$

Prosiguiendo el proceso llegaremos a:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \qquad \xi \in (a, x)$$

Teniendo en cuenta que $F(x)$ es la diferencia entre la función y su polinomio de Taylor, que $G(x) = (x-a)^{n+1}$ y que $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ resulta:

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \; ; \qquad \xi \in (a, x)$$

de donde

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \; ; \qquad \xi \in (a, x)$$

□

Tema 10

Estadistica

10.1. Introducción

La Estadística trata de describir colectividades formadas por un gran número de objetos. El conjunto de los objetos que se estudian se denomina **población**. En ocasiones, el estudio se hace a partir de una **muestra**, esto es, cierto número de objetos tomados aleatoriamente de la población. El número de objetos de la población o de la muestra es su **tamaño**.

Sobre la población o sobre una muestra se mide una magnitud. Los valores que toma esta magnitud forman la **variable estadística**. Si la variable estadística toma valores numéricos se dice que es **cuantitativa**. Si no es así (por ejemplo si se estudia la raza de una población de gatos) la variable es **cualitativa**.

Una variable estadística cuantitativa puede tomar un número finito de valores o los infinitos valores comprendidos en un cierto intervalo. En el primer caso hablaremos de variable estadística **discreta** y en el segundo de variable **continua**. En realidad la variable nunca es estrictamente continua en el sentido explicado pues la precisión de los instrumentos de medida no permite apreciar infinitos valores. En la práctica, la variable será continua cuando pueda tomar un número muy elevado de valores; en este caso, los valores de la variable estadística se agrupan en intervalos.

10.2. Frecuencias

La **frecuencia** o frecuencia absoluta de un valor x de la variable estadística es el número de objetos de la población que presentan ese valor. Representaremos esta frecuencia por f. La frecuencia de un determinado valor dividido por el número de elementos de la población, esto es, la proporción de elementos de la población que presenta este valor es la **frecuencia relativa** que representaremos por h. Evidentemente se cumple que:

$$h = \frac{f}{N}$$

donde N es el número de objetos de la población.

La **frecuencia acumulada** F de un resultado x es el número de elementos de la población en los que la variable toma valores menores o iguales que x. Dividiendo por el número de elementos de la población se obtiene la **frecuencia acumulada relativa** H.

Los valores de la variable estadística y las correspondientes frecuencias se representan en las llamadas tablas de frecuencias, que tienen siguiente forma (se presentan dos tablas, una para variable discreta y otra para variable continua):

x	f	h	F	H
x_1	f_1	h_1	F_1	H_1
x_2	f_2	h_2	F_2	H_2
x_3	f_3	h_3	F_3	H_3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	f_n	h_n	F_n	H_n

x	f	h	F	H
$[x_0, x_1)$	f_1	h_1	F_1	H_1
$[x_1, x_2)$	f_2	h_2	F_2	H_2
$[x_2, x_3)$	f_3	h_3	F_3	H_3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[x_{n-1}, x_n)$	f_n	h_n	F_n	H_n

De las definiciones se deducen algunas condiciones que deben cumplir estos valores:

- La suma de todas las frecuencias debe ser igual al tamaño de la población o de la muestra.
- La última frecuencia acumulada también debe ser igual al tamaño de la población o de la muestra.
- La suma de las frecuencias relativas debe ser 1 y también la última frecuencia relativa acumulada.

También debe cumplirse que, por ejemplo:

$$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

es decir a la suma de las frecuencias absolutas anteriores. O también:

$$F_4 = f_4 + F_3$$

o sea, la frecuencia correspondiente más la frecuencia acumulada anterior. Relaciones similares deben cumplirse para las frecuencias relativas.

10.3. Gráficos estadísticos

Los valores de la variable estadística y sus frecuencias pueden representarse gráficamente de muchas maneras. Consideraremos solamente los más comunes.

Para variable discreta se utilizan los diagramas de barras. Los valores de la variable se indican sobre el eje de abscisas y sobre ellos se dibuja una barra de altura proporcional a la frecuencia. Pueden representarse de esta forma tanto las frecuencias absolutas como las frecuencias relativas o las frecuencias acumuladas:

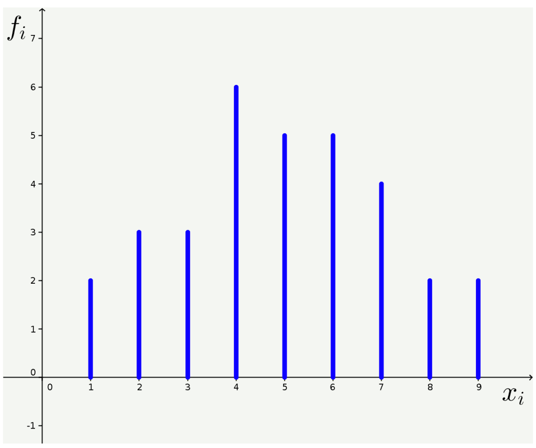


Figura 10.1: Diagrama de barras

Si la variable estadística es continua se utilizan los **histogramas** y los **diagramas de frecuencias acumuladas**. Un histograma consiste en representar los intervalos en que hemos dividido la variable sobre el eje de abscisas y, sobre él, se dibuja un rectángulo de área proporcional a la frecuencia correspondiente: Si todos los intervalos (clases) tienen la misma longitud, la altura de los rectángulos es proporcional a

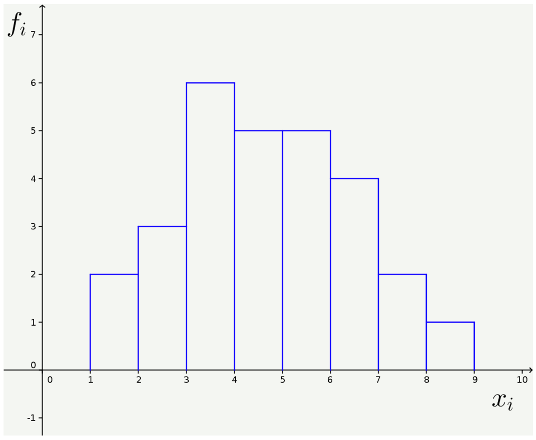


Figura 10.2: Histograma

la frecuencia de cada clase. Si los intervalos no tienen todos la misma longitud, las alturas son entonces proporcionales a la densidad de frecuencia. La densidad de frecuencia de una clase es la frecuencia dividida por la longitud del intervalo. Dicho de otra manera, la frecuencia de una clase es igual a la longitud del intervalo por la densidad de frecuencia.

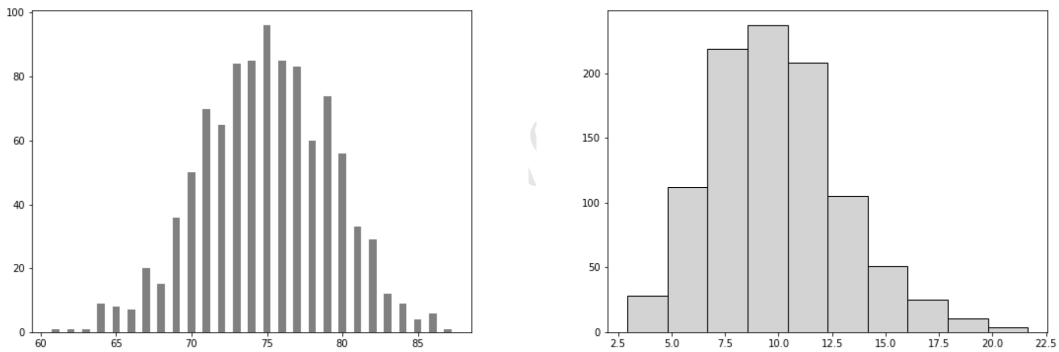


Figura 10.3: Diagramas generados mediante Python

Los diagramas de frecuencias acumuladas (absolutas o relativas) se obtienen tomando como ordenada sobre el extremo derecho del intervalo la frecuencia acumulada correspondiente y uniendo los puntos así obtenidos mediante segmentos:

10.4. Parámetros estadísticos

Parámetros de posición

Llamaremos **cuantil** c a un valor de la variable estadística tal que el $c\%$ de los valores de la variable estadística son menores o iguales que c.

Los cuantiles suelen definirse por grupos de valores que dividen los datos en partes del mismo tamaño. Suelen utilizarse cuantiles que dividen los datos en dos, cuatro, diez o cien partes iguales.

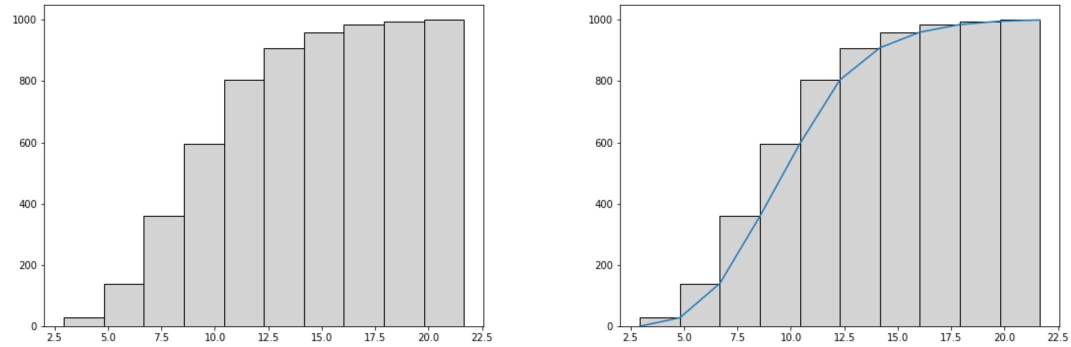


Figura 10.4: Histograma de frecuencias acumuladas y polígono de frecuencias acumuladas

El cuantil correspondiente al 50 % de los datos se llama **mediana**. Supongamos que todos los valores obtenidos de la variable estadística se ordenan de menor a mayor. El número que divide los datos en dos partes iguales es la mediana. La mediana es el valor que deja el mismo número de términos a su izquierda y a su derecha. Si el número de términos es par entonces se tomará como mediana la media de los valores centrales.

La mediana se puede obtener fácilmente a partir de la tabla de frecuencias relativas acumuladas. Si no aparece en la tabla el valor $0,50$, entonces es el valor de la variable correspondiente al primer valor de la frecuencia acumulada relativa superior a $0,50$. Si en la tabla aparece la frecuencia acumulada $0,50$ (o sea el 50 %) entonces la mediana es la media entre el valor de la variable correspondiente a ese $0,50$ y el siguiente.

Si la variable es continua, esto es, si aparece dividida en intervalos, se puede localizar el intervalo mediano tal como se ha expuesto en el párrafo anterior. Una vez conocido este intervalo se tomará como mediana el valor de la variable correspondiente al 50 % en el polígono de frecuencias acumuladas relativas (Q_2 en la figura 10.5).

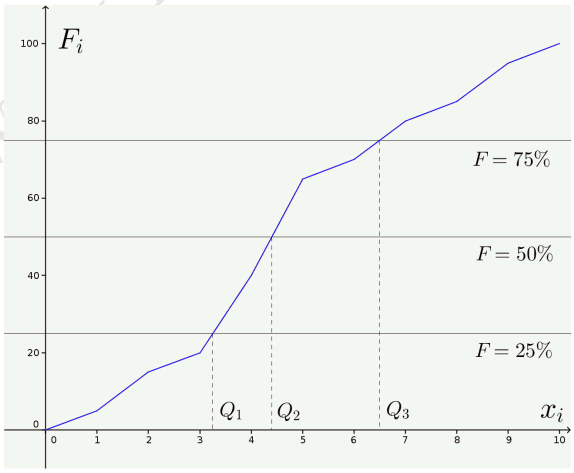


Figura 10.5: Polígono de frecuencias acumuladas

De forma similar, se llaman **primero, segundo y tercer cuartil**, los valores de la variable correspondientes a frecuencias acumuladas de $0,25$, $0,50$ y $0,75$, es decir, aquellos que dividen al conjunto de valores obtenidos en cuatro partes con el mismo número de términos. Se representan por Q_1, Q_2 y Q_3. El segundo cuartil coincide con la mediana.

Los valores mínimo y máximo de los datos y los cuartiles se representan gráficamente mediante el **dia-**

grama de cajas (ver figura).

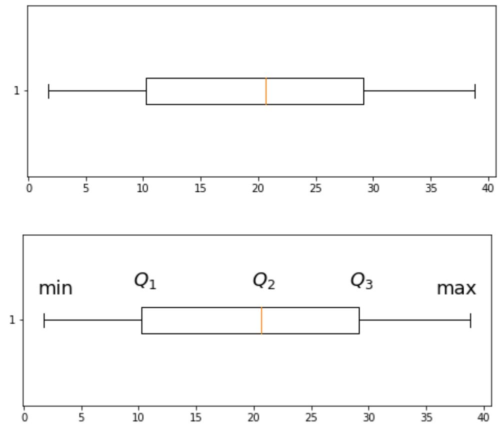


Figura 10.6: Diagrama de cajas

Los cuartiles dividen los datos en cuatro partes del mismo tamaño. De la misma forma se definen los cuantiles que los dividen en 10 partes (deciles) o en 100 partes (percentiles).

Se llaman **datos atípicos** aquellos datos que aparecen significativamente distantes del resto de los datos. En muchas ocasiones los datos atípicos no se tienen en cuenta por considerar que se deben a un error o por no considerarlos representativos. Se suelen tomar como atípicos aquellos datoa que son menores que el primer cuartil o mayores que el tercero en 1,5 veces el rango intercuartílico, es decir los que no se encuentran en el intervalo:

$$\left[Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1), Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1)\right]$$

Medidas de tendencia central

La **moda** es el valor que ocurre más frecuentemente. En una tabla de frecuencias es el valor que se corresponde con la frecuencia más alta. Si la variable estadística es continua, la clase modal es la que tiene la frecuencia mas alta o, en caso de que las clases tengan longitudes diferentes, la que tenga la densidad de frecuencia más alta.

La **mediana** ya la hemos tratado en el apartado anterior.

Si el intervalo mediano es (x_1, x_2) y a los extremos del intervalo les corresponden unas frecuencias acumuladas relativas H_1 y H_2, el valor de la mediana está dado por:

$$\text{Mediana} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{H_2 - H_1}(0,50 - H_1)$$

La **media o media aritmética** de una variable estadística se define como la suma de todos los valores de la variable dividido por el número de elementos de la población:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$$

La suma de todos los valores que toma la variable estadística puede obtenerse como suma de los productos de cada valor por su fracuencia. Así:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \Sigma h_i x_i$$

donde se ha hecho uso de la relación $f_i = N \cdot h_i$. En caso de que los datos aparezcan agrupados en intervalos, tomaremos como valor de la variable la **marca de clase**, es decir, el punto medio del intervalo.

La media es, como hemos visto, un número que cumple que $\Sigma x = N\bar{x}$, es decir, si todos los valores de la variable fuesen iguales a la media, su suma sería la misma.

Medidas de dispersión

La media nos permite comparar dos poblaciones sobre las que se ha medido la misma magnitud pero no nos permite saber si los valores de la variable están próximos a la media o no. Por ejemplo, una media de cinco se puede obtener con dos cincos o con un diez y un cero.

Para saber cómo están distribuidos los valores en torno a la media son precisos otros parámetros. Estos son el **rango**, el **rango intercuartílico**, la **varianza** y la **desviación típica**.

El rango es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable estadística.

El rango intercuartílico es la diferencia entre el tercer y el primer cuartil.

La varianza se define por:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \Sigma h_i (x_i - \bar{x})^2$$

y su raíz cuadrada o desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\Sigma h_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Desarrollando el cuadrado de la diferencia, podemos encontrar otra expresión para la varianza:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} \\
&= \frac{\Sigma f_i x_i^2 + \Sigma f_i \bar{x}^2 - \Sigma 2 f_i x_i \bar{x}}{N} \\
&= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} + \frac{\bar{x}^2 \Sigma f_i}{N} - \frac{2\bar{x}\Sigma f_i x_i}{N} \\
&= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{x} \\
&= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \\
&= \overline{x^2} - \bar{x}^2
\end{aligned}$$

Esta expresión puede recordarse diciendo que la varianza es igual a la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media.

La media y la desviación típica tienen las siguientes propiedades:

- Si se suma el mismo número a todos los valores de la variable, la media queda incrementada en esa cantidad pero la desviación típica no varía.
- Si todos los valores de la variable se multiplican por el mismo número, la media y la desviación típica quedan multiplicados por ese número. La multiplicación de todos los valores por un número puede interpretarse como un cambio de unidades. Esta propiedad dice que la media y la desviación típica se expresan en las nuevas unidades.

El cociente de la desviación típica y la media se llama **coeficiente de variación**:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Para comparar un valor de la variable estadística con el resto de los valores obtenidos en una determinada población se utilizan las **puntuaciones típicas**. En estas se toma como valor cero el de la media y como unidad la desviación típica. El paso de la variable x al valor típico z se hace mediante la fórmula:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

o, despejando $x = \bar{x} + z\sigma$.

10.5. Ejemplo

Ejercicio 61. En una encuesta sobre tráfico se ha preguntado a 1000 conductores sobre el número de multas recibidas. Se dispone de la siguiente información:

Nº de conductores	180	280	150	200	110	80
Nº de multas	0	1	2	3	4	5

Hacer la tabla de frecuencias con los datos necesarios para calcular:

(*a*) La mediana.
(*b*) Los cuartiles y el rango intercuartílico.
(*c*) La moda.
(*d*) La media.
(*e*) La desviación típica.

Solución:

Construimos la tabla con las frecuencias, frecuencias acumuladas, productos de las frecuencias por los datos y productos de las frecuencias por los cuadrados de los datos.

x_i	f_i	F_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	180	180	0	0
1	280	460	280	280
2	150	610	300	600
3	200	810	600	1800
4	110	920	440	1760
5	80	1000	400	2000
Total	1000		2020	6440

Con estos datos tenemos:

(*a*) La mediana sería el valor medio de los datos que, ordenados, ocupasen los lugares 500 y 501. A la vista de la tablas de frecuencias acumuladas, la mediana es $Q_2 = 2$.

(*b*) De forma similar calculamos el primer cuartil (media entre los datos que ocupan el lugar 250 y 251) $Q_1 = 1$ y el tercer cuartil $Q_3 = 3$. El rango intercuartílico es $Q_3 - Q_1 = 2$.

(*c*) La moda es el dato con mayor frecuencia. En este caso 1.

(*d*) La media es la suma de los $f_i x_i$ dividido por el número de datos que es la suma de las f_i:

$$\bar{x} = \frac{2020}{1000} = 2{,}02$$

(*e*) La varianza es la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media:

$$\sigma^2 = \frac{6440}{1000} - \bar{x}^2 = 2,36$$

y la desviación típica es la raíz de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{2,3596} = 1,54$$

♠♠♠♠

10.6. Muestras

Hemos visto que una población es un conjunto de objetos sobre el que se desarrolla un estudio estadístico. En muchas ocasiones, resulta difícil el estudio estadístico sobre la población. Puede ocurrir, por ejemplo, que el tamaño de la población sea muy grande. Por ejemplo, en un estudio sobre intención de voto sería muy complicado preguntar y obtener respuesta de todos los votantes. Otras veces, el proceso de medida es destructivo, por ejemplo, cuando se mide la duración de un tipo de bombillas. Es por estas razones que se utilizan muestras.

Una **muestra** es un subconjunto de la población. El número de objetos de la muestra es su **tamaño**. Los parámetros obtenidos a partir de la muestra se llaman parámetros estadísticos o simplemente **estadísticos** muestrales. Así, son estadísticos, la media, varianza o las proporciones muestrales.

A partir de los estadísticos se **estiman** los parámetros poblacionales. Estas estimaciones tienen un carácter probabilístico, por ejemplo, a partir de la media muestral no se puede decir cuál es la media poblacional pero se puede afirmar que se encontrará en un cierto intervalo (**intervalo de confianza**) con una cierta probabilidad o **nivel de confianza**.

El estadístico que utilizamos para estimar un parámetro de la población es un **estimador** de ese parámetro. Un estimador es **no sesgado** si la media del estimador para todas las muestras posibles coincide con el parámetro de la población. Por ejemplo, la media muestral

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_1$$

es un estimador no sesgado de la media poblacional μ. Sin embargo, se puede demostrar que la varianza de la muestra:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

es un estimador sesgado se la varianza poblacional σ^2. Un estimador no sesgado de la varianza es el estadístico:

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

llamado a veces cuasivarianza. Si el tamaño de la muestra n es grande, los dos números son muy parecidos.

Para poder estimar los parámetros poblacionales es preciso que la muestra sea una **muestra aleatoria**, es decir, que la muestra se escoja de tal forma que todos los elementos de la población tengan la misma probabilidad de aparecer en la muestra. Algunas técnicas de muestreo son las siguientes:

– Muestreo aleatorio simple. Todos los elementos de la muestra se obtienen aleatoriamente independientemente unos de otros. No solo todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de aparecer en la muestra, también todas las muestras posibles tienen la misma probabilidad de ser elegidas.

– Muestreo sistemático. Los elementos de la población se suponen ordenados en una lista y se toma aleatoriamente un elemento inicial y un intervalo para elegir los elementos siguentes.

– Muestreo estratificado. A veces, cuando los objetos de la población aparecen clasificados en varias categorías o clases, por ejemplo, hombres y mujeres, vino tinto o vino tinto, etc, las muestras que no están formados por elementos de todas las categorías se consideran poco representativas. Por ello se seleccionan elementos de todas las clases para formar la muestra. Hay que darse cuenta que la muestra puede ser aleatoria aunque no todas las muestras tienen la misma probabilidad.

– Muestreo estratificado proporcional. Es igual que el anterior pero el número de elementos de cada clase es proporcional a la cuota que esa clase representa en la población.

10.7. Correlación y regresión lineal

Supongamos que sobre una población se miden dos magnitudes X e Y. Para cada elemento de la población se obtienen un par de valores (x, y). Considerando estos pares de números como coordenadas, podemos representar los puntos correspondientes en unos ejes de coordenadas. Se obtiene un diagrama que se llama **nube de puntos**. La nube de puntos puede ser de la siguiente forma:

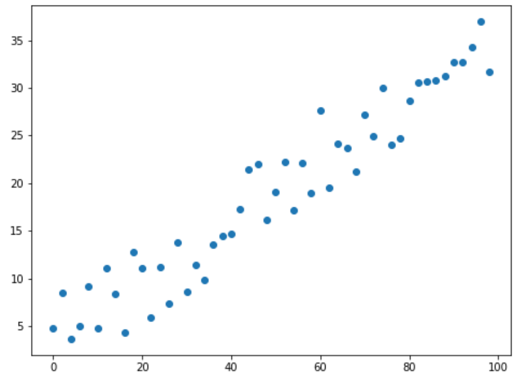


Figura 10.7: Correlación positiva

En este caso, no podemos afirmar que cuando X aumenta necesariamente aumenta Y pero sí que cuando X aumenta es más probable que Y aumente y diremos que entre X e Y existe una correlación positiva.

Si la correlación entre X e Y la correlación es negativa, la nube de puntos tendrá la siguiente forma:

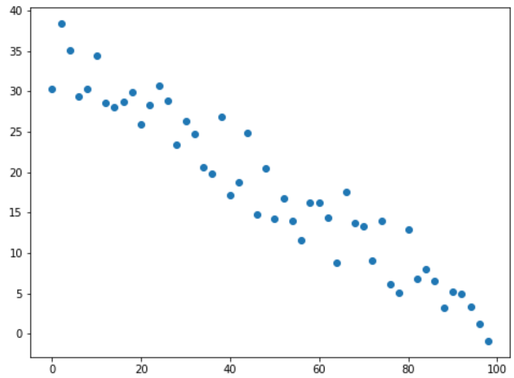


Figura 10.8: Correlación negativa

y si no existe correlación entre ambas variables:

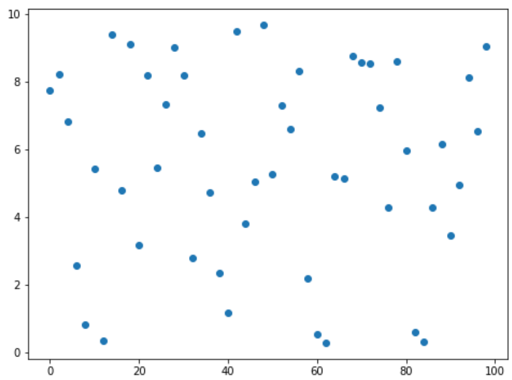


Figura 10.9: Correlación cero

La cuestión que nos vamos a plantear es decidir si las dos variables están correlacionadas, esto es, si se puede afirmar que al aumentar una aumenta la otra (**correlación positiva**) o que al aumentar la primera disminuye la segunda (**correlación negativa**).

Lo que se diga sobre las variables, forzosamente tendrá un carácter probabilístico, es decir, si las dos variables están correlacionadas positivamente, quiere decir que si aumenta una, *es probable* que aumente la otra (pero no necesariamente) y veremos una manera de evaluar esa probabilidad.

La situación es diferente cuando existe una dependencia funcional entre las variables. En este caso, si la función es creciente, cuando una de las variables aumenta, *necesariamente* aumenta la otra.

El hecho de que dos variables estén correlacionadas no implica que exista una relación de causa-efecto entre ellas. Para que esto suceda es necesario que, además de variar conjuntamente, una de ellas sea anterior en el tiempo a la otra, debe existir una relación temporal entre ellas, aspecto éste que no estamos considerando.

El concepto clave para estudiar la correlación entre las variables es el de **covarianza** que se define de la siguiente forma:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

Desarrollando la suma, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= \frac{1}{N}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) \\
&= \frac{1}{N}\sum xy - \frac{1}{N}\sum x\bar{y} - \frac{1}{N}\sum \bar{x}y + \frac{1}{N}\sum \bar{x}\bar{y} \\
&= \frac{1}{N}\sum xy - \bar{y}\cdot\frac{1}{N}\sum x - \bar{x}\cdot\frac{1}{N}\sum y + \frac{1}{N}\cdot N\bar{x}\bar{y} \\
&= \frac{1}{N}\sum xy - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \\
&= \frac{1}{N}\sum xy - \bar{x}\bar{y} \\
&= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}
\end{aligned}$$

Como se ve, la covarianza puede calcularse (al igual que sucedía con la varianza) de dos formas diferentes, calculando la media de los productos de las diferencias con las medias de las dos variables, o como diferencia entre la media de los productos de las dos variables y el producto de las medias.

Si las dos variables están correlacionadas positivamente, la covarianza será positiva y si están correlacionadas negativamente será negativa.

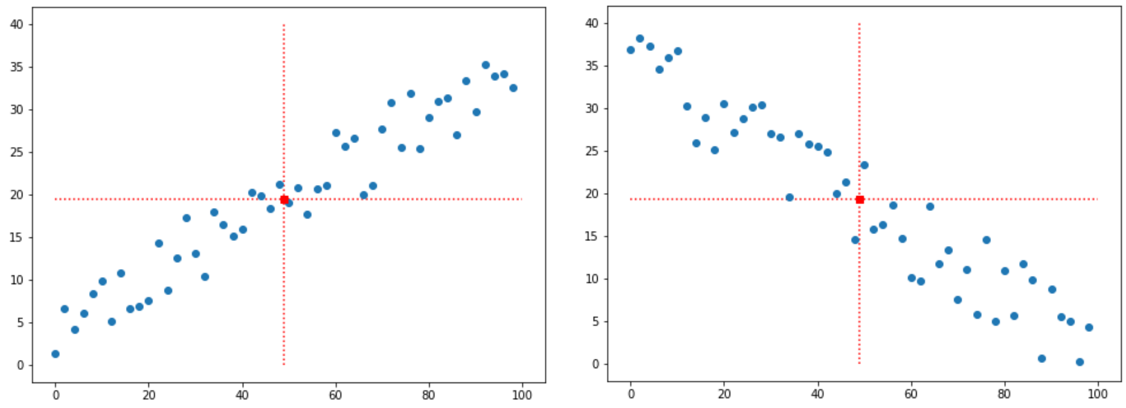


Figura 10.10: Covarianzas positiva y negativa

Esto se entiende si representamos la nube de puntos y dibujamos unos ejes centrados en las medias (en el punto $(\bar{x},\bar{y})$). Si la correlación es positiva, la mayor parte de los puntos debe estar en el primer y tercer cuadrante respecto a estos ejes. En este caso los dos factores del producto tienen el mismo signo, los productos son positivos y también lo será la covarianza. Lo contrario sucede si la correlación es negativa (figura 10.10).

Si las variables no están correlacionadas, los puntos de la nube aparecen repartidos por los cuatro cuadrantes, los productos de coordenadas de los puntos del primer y tercer cuadrante son positivos y los del segundo y cuarto son negativos y la suma resulta ser próxima a cero (figura 10.11).

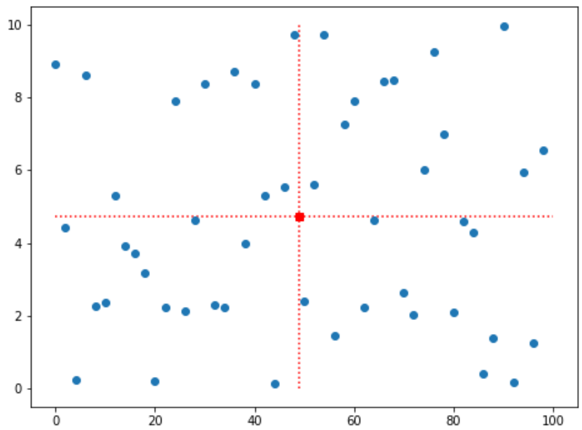


Figura 10.11: Covarianza próxima a cero

La covarianza permite saber si la correlación es positiva o negativa pero no permite saber si es fuerte o débil pues su valor depende de la unidades utilizadas. Por ello se utiliza el **coeficiente de correlación**:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

que toma valores comprendidos entre -1 y $+1$. La correlación es positiva y fuerte si el valor de r es próximo a $+1$; es negativa y fuerte si el valor de r es próximo a -1. Si r es práximo a cero, la correlación es debil.

Ejercicio 62. Los valores de las variables X e Y medidas sobre la misma población están dados en la siguiente tabla:

x	4	16	18	9	15	13	4	2	13	6
y	3	18	16	7	17	14	6	4	11	7

Calcular la covarianza y el coeficiente de correlación.

Solución:

Calculamos en primer lugar las media de las variables:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(4+16+18+9+15+13+4+2+13+6) = \frac{100}{10} = 10$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(3+18+16+7+17+14+6+4+11+7) = \frac{103}{10} = 10{,}3$$

La suma de los productos es:

$$\sum xy = 4\cdot 3 + 16\cdot 18 + 18\cdot 16 + 9\cdot 7 + 15\cdot 17 + 13\cdot 14 + 4\cdot 6 + 2\cdot 4 + 13\cdot 11 + 6\cdot 7 = 1305$$

La covarianza es la media de los productos menos el producto de las medias:

$$\sigma_{xy} = \frac{1305}{10} - 10\cdot 10{,}3 = 27{,}5$$

Para calcular el coeficiente de correlación debemos hallar las desviaciones típicas:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{10}\left(4^2+16^2+18^2+9^2+15^2+13^2+4^2+2^2+13^2+6^2\right) - 10^2 = 129{,}6 - 10^2 = 29{,}6$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{10}\left(3^2+18^2+16^2+7^2+17^2+14^2+6^2+4^2+11^2+7^2\right) - 10{,}3^2 = 134{,}5 - 10{,}3^2 = 28{,}41$$

El coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{27{,}5}{\sqrt{29{,}6} \cdot \sqrt{28{,}41}} \simeq 0{,}948$$

♠♠♠♠

Supongamos ahora que dos variables X e Y están linealmente correlacionadas. Puesto que la relación entre ambas variables tiene un carácter estadístico, si para un dato la primera variable toma un valor x no podemos conocer a partir de él el correspondiente valor de la otra variable, pero sí puede calcularse un valor probable o aproximado.

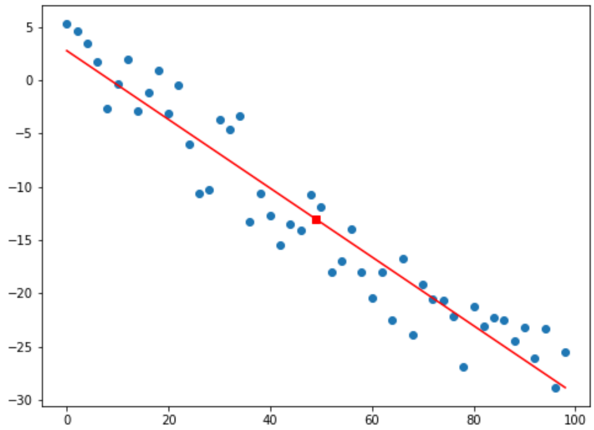


Figura 10.12: Recta de regresión

Se llama **recta de regresión** a la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos (figura 10.12). Sea $y = mx + b$ la ecuación de esta recta. El criterio de ajuste de la recta a la nube es hacer que la cantidad

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - b)^2$$

sea mínima. Es decir debe ser mínima la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de la variable Y y las ordenadas de los puntos de la recta.

Para calcular los valores de la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión hace falta un poco de cálculo diferencial que todavía no hemos estudiado. Por ello daremos simplemente el resultado sin justificarlo.

La recta de regresión pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ y tiene como pendiente el cociente de la covarianza y la varianza. Su ecuación es:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\,(x - \bar{x})$$

Esta recta es la recta de regresión de y sobre x. Mediante esta ecuación, dado un valor para x podemos calcular el valor probable de y.

Si queremos calcular el valor probable de x conocido el de y basta intercambiar todas las x e y en la igualdad anterior. Así obtenemos la recta de regresión de x sobre y:

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\,(y - \bar{y})$$

Ejercicio 63. Con los datos del ejercicio anterior calcular la recta de regresión para estimar el valor de y correspondiente a $x = 3$.

Solución:

Debemos calcular la ecuación de la recta de regresión de y sobre x. La pendiente de esta recta es:

$$m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{27{,}5}{29{,}6} \simeq 0{,}93$$

Y, puesto que la recta pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$, la recta es:

$$y - 10{,}3 = 0{,}93\,(x - 10)\ ; \qquad y = 0{,}93x + 1$$

Con la aproximación pedida resulta que para $x = 3$, $y = 4$.

♠♠♠♠

10.8. Problemas

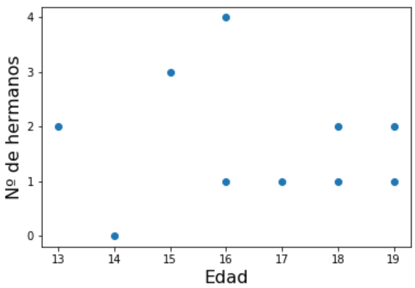
1. Considere el siguiente conjunto de datos 3, 6, 1, a, b, dosnde $a > b$. La moda de estos datos es 5. La mediana de los datos es 4,5.
   (*a*) Calcular el valor de a y el valor de b.
   (*b*) Calcular la media de los datos.
2. (*a*) Un grupo de 10 amigos tiene un peso medio de 70 kg. Un nuevo amigo, Esteban, se incorpora al grupo. La media de los 11 amigos es ahora de 72 kg. Calcule el peso de Esteban.
   (*b*) Los nuevos cuartiles inferior y superior de los 11 amigos son, respectivamente, 66 y 76 kg. Determine si el peso de Esteban es un outlier y justifique la respuesta.
3. Susana ha recogido datos de la altura de las flores y los representa en la siguiente tabla:

Altura (cm)	(0,10]	(10,20]	(20,30]	(30,40]	(40,50]
Frecuencia	40	45	50	60	5

   (*a*) Escribir cuántas flores ha medido Susana.
   (*b*) Calcular el punto medio del intervalo modal.
   (*c*) Calcular una estimación de la media y de la desviación típica.
   (*d*) La calculadora de Susana dice que la mediana es 25. Hacer una estimación mejor aproximando la respuesta al entero más próximo.
4. Isabel y Roberto son profesores de distintas clases de matemáticas de BI. En un examen, los estudiantes de Isabel han obtenido los siguientes resultados 1, 1, 4, 7, 8, 8, 10, 10. En el mismo examen, los estudiantes de Roberto han obtenido 4, 4, 4, 5, 6, 6, 10, 10, 10, 10.
   (*a*) Calcular la media y la mediana de la clase de Isabel.
   (*b*) Calcular la media y la mediana de la clase de Roberto.
   (*c*) Dar una razón que justifique que los resultados de Isabel son mejores.
   (*d*) Dar una razón que justifique que los resultados de Roberto son mejores.
5. Los resultados de un examen de BI se muestran en la tabla siguiente:

Nota	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	4	8	16	20	16	8	4

   (*a*) Representar estos datos mediante un diagrama de barras.
   (*b*) Calcular la moda, la mediana y la media.
   (*c*) Explicar los resultados correspondientes a la mediana y la media a partir del diagrama de barras.
6. Unos pares de datos fuertemente correlacionados tienen una recta de regresión de y sobre x de la forma $y = mx + c$. Cuando $x = 70$, una estimacion de $y$es 100. Cuando $x = 100$ la estimación de y es 140.
   (*a*) Calcular los valores de m y c.
   (*b*) Comprobar si la correlación es positiva o negativa.
   (*c*) El valor de $\bar{x}$ es 90. Calcular el valor de $\bar{y}$.
   (*d*) Cuando $x = 60$ estimar el valor de y supuesto que se trata de una interpolación.
7. Se preguntó a diez estudiantes por su edad y número de hermanos. Se obtuvo la siguiente nube de puntos:



(*a*) Con ayuda de la nube de puntos copiar y completar la siguiente tabla:

x	13	14	15	16	16	17	18	18	19	19
y					4			2	1	

(*b*) Calcular el coeficiente de correlación de Pearson para estos datos.

(*c*) Dar dos razones por las cuales no sería válido usar la nube de datos para estimar el número de hermanos y hermanas que un estudiante de 25 años pueda tener.

8. Un conjunto de datos bidimensionales tiene un coeficiente de Pearson $r = 0{,}87$ para 25 pares (x, y). La recta de regresión de y sobre x tiene como ecuación $y = 15x + 11$. Considerar la nube de puntos, el valor de r y la recta de regresión para responder las siguientes preguntas.
   (*a*) A los valores originales de x se les suma 5 y a los valores originales de y se les resta 4.
   (i) Escribir el nuevo valor de r.
   (ii) escribir el nuevo valor de la pendiente de la recta de regresión.
   (iii) Justificar las respuestas anteriores.
   (iv) Describir con dos palabras la correlación entre los datos.
   (*b*) Los valores originales de y se multiplican por 2 y los de x se dejan igual.
   (i) Escribir el nuevo valor de r.
   (ii) Escribir el nuevo valor de la pendiente de la recta de regresión de y sobre x.
   (iii) Justificar las respuestas anteriores.
   (*c*) Los valores originales de x se multiplican por -3 y los valores de y no cambian.
   (i) Escribir el nuevo valor de r.
   (ii) escribir el nuevo valor de la pendiente de la recta de regresión de y sobre x.
   (iii) Justificar las respuestas anteriores.
   (iv) Describir con dos palabras la correlación entre los nuevos datos.

9. Los siguientes datos representan las alturas (x metros) y longitudes (y metros) de un tipo de animal raro encontrado en una pequeña isla.

x	2,4	3,6	2,8	1,8	2,0	2,2	3,0	3,4
y	3,0	4,0	3,0	1,7	2,0	2,3	3,1	2,7

   (*a*) (i) Calcular el coeficiente de correlación de Pearson.
   (ii) Describir con dos palabras la correlación existente entre los datos.
   (iii) Calcular la recta de regresión de y sobre x.
   (*b*) Otros cuatro ejemplos de este raro animal han sido hallados en otra pequeña isla cercana. Estos datos son

x	2,3	2,7	3,0	3,5
y	4,1	1,5	4,2	1,5

   (i) Calcular el coeficiente de Pearson de los datos combinados de los 12 animales.
   (ii) Describir en dos palabras la correlación existente.
   (iii) Dar una razón que justifique por qué no es válido calcular la reta de regresión de los datos combinados.

10. Se pasa un test de inteligencia a diez pares de gemelos. Los pares están formados por un hombre y una mujer. Los datos se reflejan en la siguiente tabla:

Mujeres	100	110	95	90	103	120	97	105	89	111
Hombres	98	107	95	89	100	112	99	101	89	109

   (*a*) Calcular el coeficiente de correlación r.
   (*b*) Describir con dos palabras la correlación.
   (*c*) Sea x el resultado de los hombres e y el de las mujeres, calcular
   (i) La recta de regresión de y sobre x.
   (ii) La recta de regresión de x sobre y.
   (*d*) Se añade a los datos una nueva pareja. El hombre tiene una puntuación de 105 pero la mujer se encuentra enferma y no puede hacer el test. Estimar el resultado que habría obtenido aproximando al entero más próximo.
   (*e*) Se vuelve a añadir otra pareja. La mujer obtiene 95 puntos pero el hombre se niega a pasar el test. Estimar el resultado que habría obtenido aproximando al entero más cercano.
   (*f*) Si en una nueva pareja el hombre obtuviese 140 puntos, explicar por qué no se puede confiar en la recta de regresión calculada para estimar la puntuación de la mujer.