Polinomios

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

Definición

Un polinomio es una operación indicada de sumas y productos entre números y una variable x (indeterminada):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Definición

Un polinomio es una operación indicada de sumas y productos entre números y una variable x (indeterminada):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n: grado del polinomio

Polinomios

Definición

Un polinomio es una operación indicada de sumas y productos entre números y una variable x (indeterminada):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n: grado del polinomio

a_n: coeficiente principal

Definición

Un polinomio es una operación indicada de sumas y productos entre números y una variable x (indeterminada):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n:	grado del polinomio
a_n:	coeficiente principal
a_0:	término independiente

Valor numérico.

Definición

El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a.

Valor numérico.

Definición

El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a.

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Valor numérico.

Definición

El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a.

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

Valor numérico.

Definición

El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a.

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$P(-3) = 2 \cdot (-3)^4 - 5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 2$$

Valor numérico.

Definición

El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a.

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2 \cdot (-3)^4 - 5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 2 \cdot 81 - 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-3) - 2 \end{aligned}$$

Valor numérico.

Definición

El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a.

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2 \cdot (-3)^4 - 5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 2 \cdot 81 - 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 162 - 45 - 12 - 2 \end{aligned}$$

Valor numérico.

Definición

El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a.

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2 \cdot (-3)^4 - 5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 2 \cdot 81 - 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 162 - 45 - 12 - 2 \\ &= 103 \end{aligned}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$2 \qquad 0 \qquad -5 \qquad 4 \qquad -2$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & & & \\ \hline & 2 & -6 & & & \end{array}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & & \\ \hline & 2 & -6 & & & \end{array}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & & \\ \hline & 2 & -6 & 13 & & \end{array}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & -39 & \\ \hline & 2 & -6 & 13 & & \end{array}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & -39 & \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -35 & \end{array}$$

Valor numérico. Regla de Ruffini(1)

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & -39 & 105 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -35 & \end{array}$$

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini.

Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

	2	0	–5	4	–2
–3		–6	18	–39	105
	2	–6	13	–35	103

Raíces de un polinomio

Definición

Un número r es raíz de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \iff P(r) = 0$$

Raíces de un polinomio

Definición

Un número r es raíz de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \iff P(r) = 0$$

Propiedad: las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente:

Raíces de un polinomio

Definición

Un número r es raíz de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(r) = 0$$

Propiedad: las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente:

$$r \text{ raíz de } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Raíces de un polinomio

Definición

Un número r es raíz de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \iff P(r) = 0$$

Propiedad: las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente:

$$\begin{aligned} & r \text{ raíz de } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ \Longrightarrow \quad & a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Raíces de un polinomio

Definición

Un número r es raíz de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \iff P(r) = 0$$

Propiedad: las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente:

$$\begin{aligned} & r \text{ raíz de } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ \Longrightarrow \quad & a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_0 = -a_1 r - a_2 r^2 - a_3 r^3 - \cdots \end{aligned}$$

Raíces de un polinomio

Definición

Un número r es raíz de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \iff P(r) = 0$$

Propiedad: las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente:

$$\begin{aligned} & r \text{ raíz de } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ \Longrightarrow \quad & a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_0 = -a_1 r - a_2 r^2 - a_3 r^3 - \cdots \\ \Longrightarrow \quad & a_0 = -r(a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \cdots) \end{aligned}$$

Raíces de un polinomio

Definición

Un número r es raíz de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \iff P(r) = 0$$

Propiedad: las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente:

$$\begin{aligned}
& r \text{ raíz de } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\
\Longrightarrow \quad & a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots = 0 \\
\Longrightarrow \quad & a_0 = -a_1 r - a_2 r^2 - a_3 r^3 - \cdots \\
\Longrightarrow \quad & a_0 = -r(a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \cdots) \\
\Longrightarrow \quad & r \text{ es divisor de } a_0
\end{aligned}$$

Polinomios primos y compuestos

- Son polinomios compuestos los que pueden descomponerse como producto de polinomios de menor grado. Por ejemplo $x^2 - 1$ es compuesto porque puede descomponerse como:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Polinomios primos y compuestos

- $\diamond$ Son polinomios compuestos los que pueden descomponerse como producto de polinomios de menor grado. Por ejemplo $x^2 - 1$ es compuesto porque puede descomponerse como:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

- $\diamond$ Son polinomios primos los que no pueden descomponerse como producto de polinomios de menor grado. Por ejemplo, $3x - 6$ o $x^2 + 1$ son polinomios primos.

Polinomios primos y compuestos

- Son polinomios compuestos los que pueden descomponerse como producto de polinomios de menor grado. Por ejemplo $x^2 - 1$ es compuesto porque puede descomponerse como:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

- Son polinomios primos los que no pueden descomponerse como producto de polinomios de menor grado. Por ejemplo, $3x - 6$ o $x^2 + 1$ son polinomios primos.
- Los polinomios primos son los polinomios de primer grado y los de segundo que no tienen raíces (los de discriminante menor que cero). Todos los demás pueden descomponerse en factores y son compuestos.

Polinomios primos y compuestos

- Son polinomios compuestos los que pueden descomponerse como producto de polinomios de menor grado. Por ejemplo $x^2 - 1$ es compuesto porque puede descomponerse como:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

- Son polinomios primos los que no pueden descomponerse como producto de polinomios de menor grado. Por ejemplo, $3x - 6$ o $x^2 + 1$ son polinomios primos.
- Los polinomios primos son los polinomios de primer grado y los de segundo que no tienen raíces (los de discriminante menor que cero). Todos los demás pueden descomponerse en factores y son compuestos.

Teorema del factor

Teorema (Teorema del factor)

Si r es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x - r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x) = (x - r)Q(x)$$

Teorema del factor

Teorema (Teorema del factor)

Si r es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x - r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \iff P(x) = (x - r)Q(x)$$

Demostración.

$\square$

Teorema del factor

Teorema (Teorema del factor)

Si r es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x - r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x) = (x - r)Q(x)$$

Demostración.

- Sea r raíz del polinomio $P(x)$, es decir, $P(r) = 0$.

$\square$

Teorema del factor

Teorema (Teorema del factor)

Si r es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x - r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x) = (x - r)Q(x)$$

Demostración.

- Sea r raíz del polinomio $P(x)$, es decir, $P(r) = 0$.
- Si se divide $P(x)$ por $x - r$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

□

Teorema del factor

Teorema (Teorema del factor)

Si r es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x - r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x) = (x - r)Q(x)$$

Demostración.

- Sea r raíz del polinomio $P(x)$, es decir, $P(r) = 0$.
- Si se divide $P(x)$ por $x - r$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

- Para $x = r$:

$$P(r) = (r - r)Q(r) + R \quad \Longrightarrow \quad R = P(r) = 0$$

y por consiguiente $P(x) = (x - r)Q(x)$.

$\square$

Teorema (Teorema del resto)

El resto de dividir un polinomio por $x - a$ es el valor numérico del polimomio para $x = a$.

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R \Longleftrightarrow R = P(a)$$

Teorema del resto

Teorema (Teorema del resto)

El resto de dividir un polinomio por $x - a$ es el valor numérico del polimomio para $x = a$.

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R \iff R = P(a)$$

Demostración.

Si se divide $P(x)$ por $x - a$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Para $x = a$:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R \quad \Longrightarrow \quad R = P(a)$$

$\square$

La regla de Ruffini

	2	0	-5	4	-2
-3		-6	18	-39	105
	2	-6	13	-35	103

La regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & -39 & 105 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -35 & 103 \end{array}$$

puede interpretarse como una división en la que:

Dividendo:

Divisor:

Cociente:

Resto:

La regla de Ruffini

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\
-3 & & -6 & 18 & -39 & 105 \\
\hline
 & 2 & -6 & 13 & -35 & 103
\end{array}
$$

puede interpretarse como una división en la que:

Dividendo: $2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$

Divisor:

Cociente:

Resto:

Regla de Ruffini(2)

La regla de Ruffini

	2	0	–5	4	–2
–3		–6	18	–39	105
	2	–6	13	–35	103

puede interpretarse como una división en la que:

Dividendo: $2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$

Divisor: $x + 3$

Cociente:

Resto:

Regla de Ruffini(2)

La regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & -39 & 105 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -35 & 103 \end{array}$$

puede interpretarse como una división en la que:

Dividendo: $2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$

Divisor: $x + 3$

Cociente: $2x^3 - 6x^2 + 13x - 35$

Resto:

Regla de Ruffini(2)

La regla de Ruffini

	2	0	–5	4	–2
–3		–6	18	–39	105
	2	–6	13	–35	103

puede interpretarse como una división en la que:

Dividendo:	$2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$
Divisor:	$x + 3$
Cociente:	$2x^3 - 6x^2 + 13x - 35$
Resto:	103

Factorización de un polinomio de segundo grado

Sea $ax^2 + bx + c$ un polinomio de segundo grado.

Factorización de un polinomio de segundo grado

Sea $ax^2 + bx + c$ un polinomio de segundo grado.

Según el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Factorización de un polinomio de segundo grado

Sea $ax^2 + bx + c$ un polinomio de segundo grado.

Según el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

el polinomio se descompone:

	raíces	Factorización
$\Delta > 0$	r_1, r_2	$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$
$\Delta = 0$	r	$ax^2 + bx + c = a(x - r)^2$
$\Delta < 0$		$ax^2 + bx + c$ es primo

Aplicación

Una ecuación de tercer grado puede resolverse si se conoce una de las raíces.

Aplicación

Una ecuación de tercer grado puede resolverse si se conoce una de las raíces.

Sea, por ejemplo, la ecuación $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

Aplicación

Una ecuación de tercer grado puede resolverse si se conoce una de las raíces.

Sea, por ejemplo, la ecuación $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

Si sabemos que una solución es $x = -1$, dividimos el polinomio por $x + 1$:

Aplicación

Una ecuación de tercer grado puede resolverse si se conoce una de las raíces.

Sea, por ejemplo, la ecuación $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

Si sabemos que una solución es $x = -1$, dividimos el polinomio por $x + 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

Aplicación

Una ecuación de tercer grado puede resolverse si se conoce una de las raíces.

Sea, por ejemplo, la ecuación $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

Si sabemos que una solución es $x = -1$, dividimos el polinomio por $x + 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

Ahora podemos escribir la ecuación como:

$$(x + 1)(x^2 - 5x + 4) = 0$$

Una ecuación de tercer grado puede resolverse si se conoce una de las raíces.

Sea, por ejemplo, la ecuación $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

Si sabemos que una solución es $x = -1$, dividimos el polinomio por $x + 1$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

Ahora podemos escribir la ecuación como:

$$(x + 1)(x^2 - 5x + 4) = 0$$

e igualando a cero cada factor se calculan las soluciones.