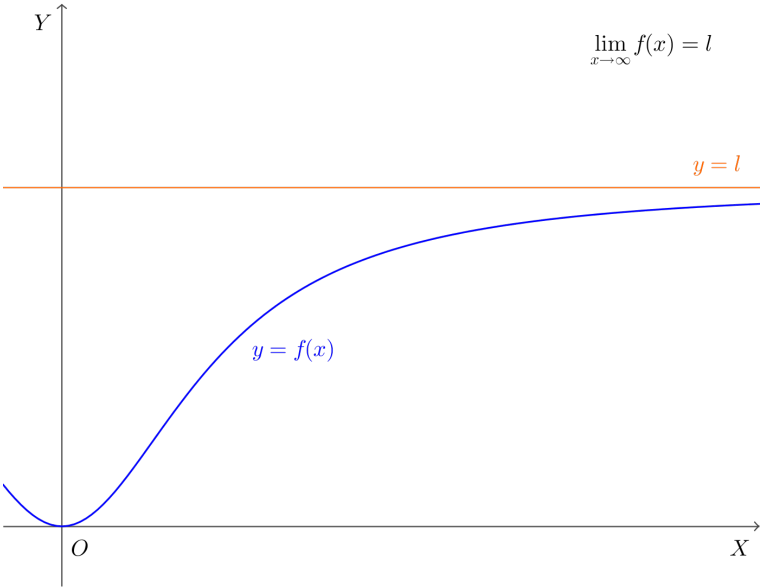
Límites. Continuidad.

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

Límite finito cuando x tiende a infinito (1)



Límite finito cuando x tiende a infinito (2)

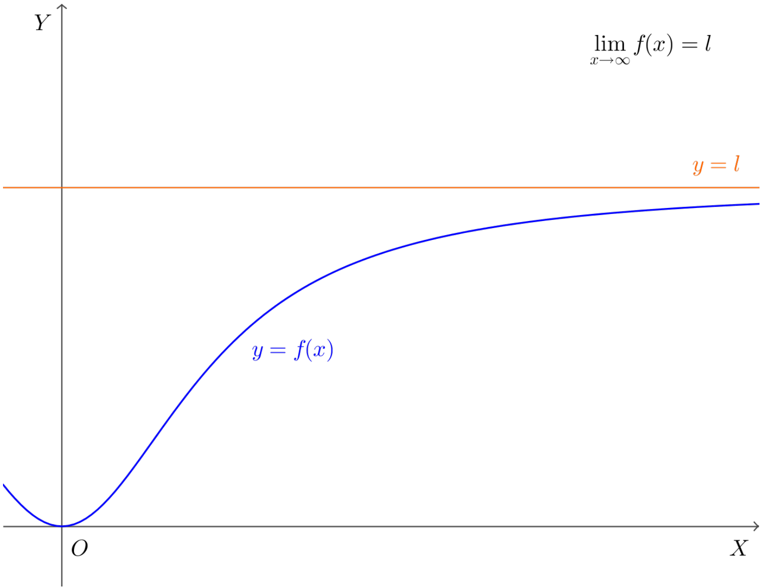
Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando la variable x tiende a infinito es l y se escribe:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

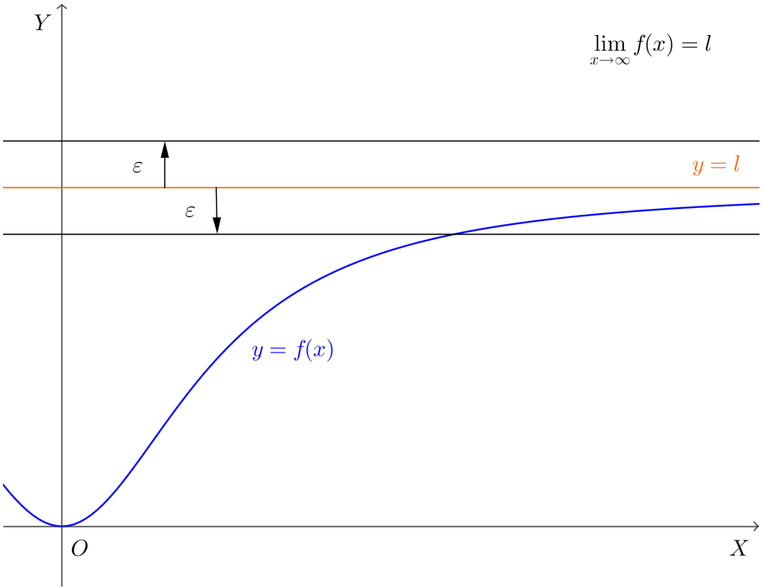
si para valores grandes de x, los valores de la función $f(x)$ son muy próximos a l.

El límite cuando x tiende a menos infinito se define de forma similar.

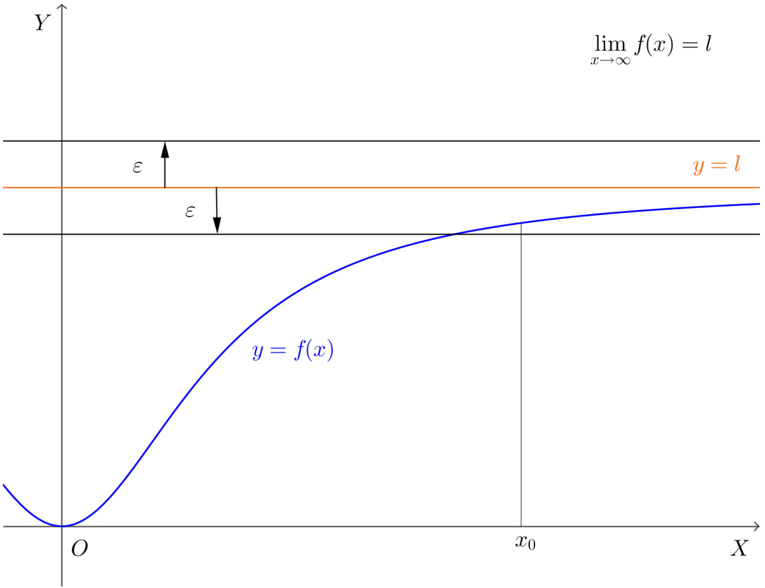
Límite finito cuando x tiende a infinito (3)



Límite finito cuando x tiende a infinito (3)



Límite finito cuando x tiende a infinito (3)



Límite finito cuando x tiende a infinito (4)

Definición (Límite finito cuando $x \to \infty$)

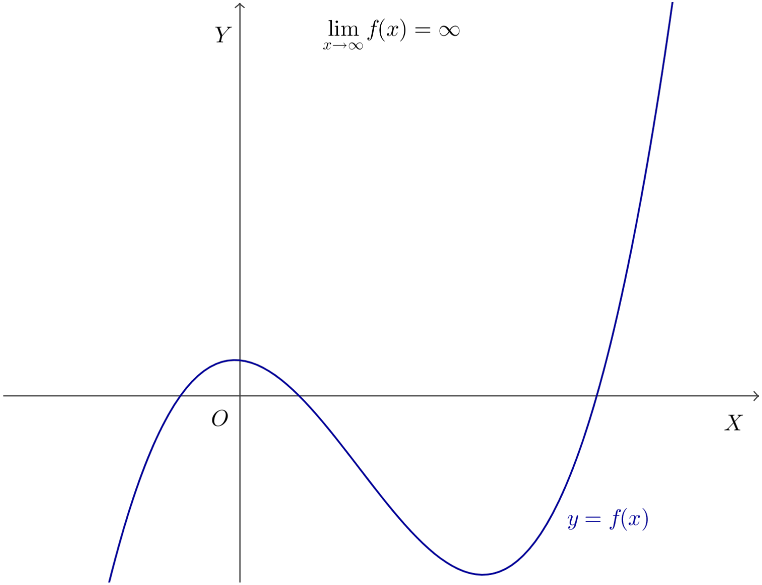
El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a infinito es l, y se escribe:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

si dado un número cualquiera ε mayor que cero, existe un valor de la variable x_0 tal que para los valores de x mayores que x_0, la distancia entre los valores de la función y el límite son menores que ε:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_0 \quad | \quad x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Límite infinito cuando x tiende a infinito (1)



Límite infinito cuando x tiende a infinito (2)

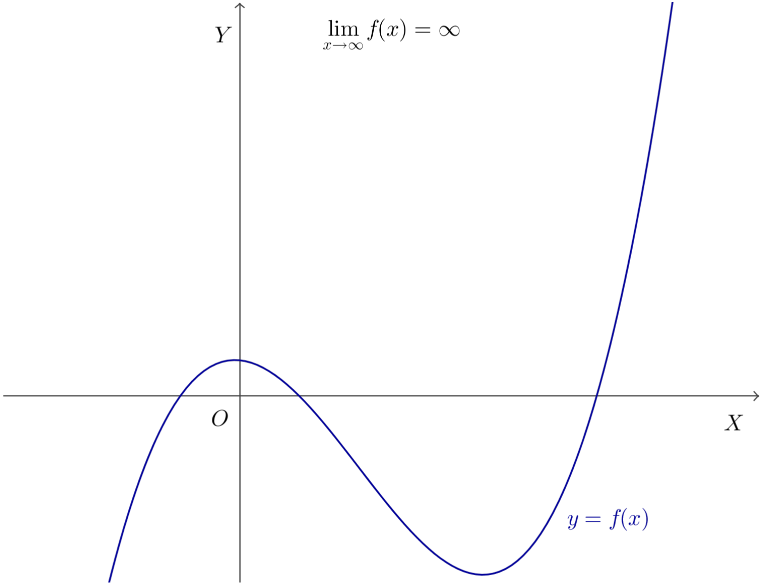
Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando la variable x tiende a infinito es infinito y se escribe:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

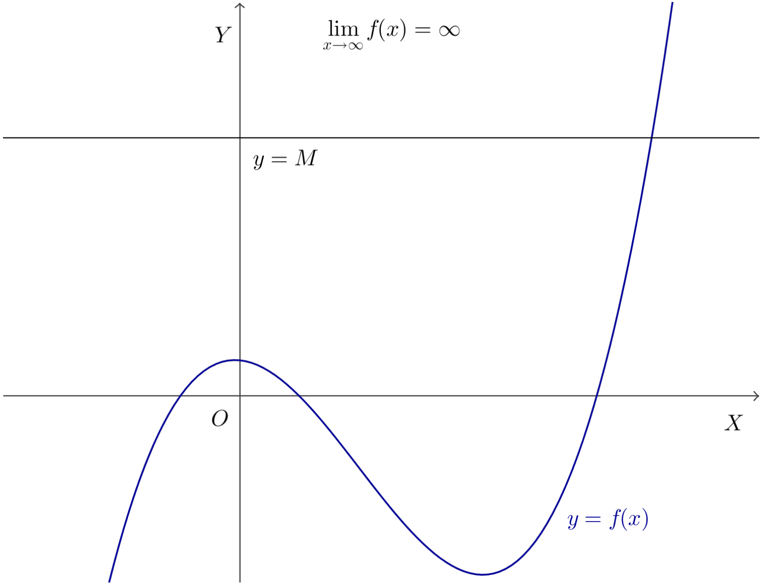
si para valores grandes de x, los valores de la función $f(x)$ son muy grandes.

El límite igual a menos infinito o los límites cuando x tiende a menos infinito se definen de forma similar.

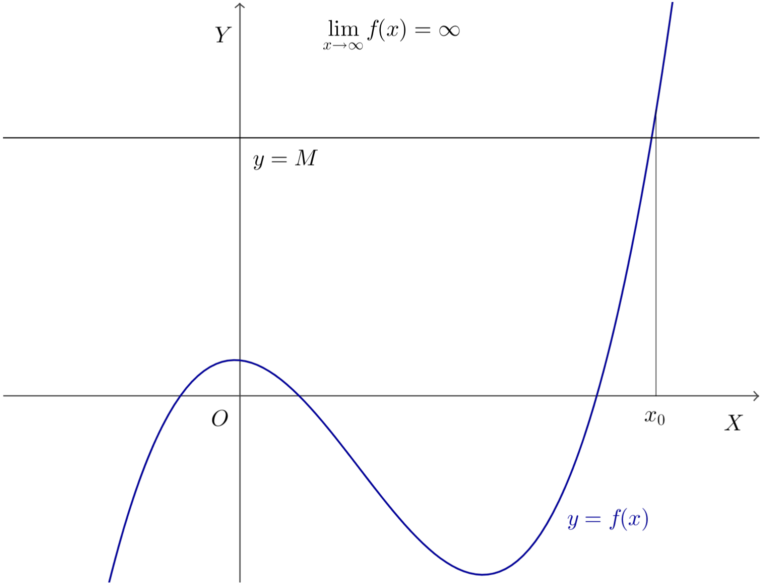
Límite infinito cuando x tiende a infinito (3)



Límite infinito cuando x tiende a infinito (3)



Límite infinito cuando x tiende a infinito (3)



Límite infinito cuando x tiende a infinito (4)

Definición (Límite infinito cuando $x \to \infty$)

Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando la variable x tiende a infinito es infinito y se escribe:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

si dado cualquier número M, existe un valor de la variable x_0 a partir del cual los valores de la función son mayores que M:

$$\forall M \quad \exists\, x_0 \quad | \quad x > x_0 \Longrightarrow f(x) > M$$

Reglas generales para el cálculo de límites

Reglas generales para el cálculo de límites

- Sumas y diferencias:

$$\infty + \infty = \infty \; ; \qquad \infty \pm k = \infty$$

Reglas generales para el cálculo de límites

- Sumas y diferencias:

$$\infty + \infty = \infty \; ; \qquad \infty \pm k = \infty$$

- Productos:

$$k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0)$$

Reglas generales para el cálculo de límites

- Sumas y diferencias:

$$\infty + \infty = \infty \, ; \qquad \infty \pm k = \infty$$

- Productos:

$$k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0)$$

- Cocientes:

$$\frac{\infty}{k} = \infty \, ; \qquad \frac{k}{\infty} = 0 \, ; \qquad \frac{k}{0} = \infty \quad (k \neq 0)$$

Reglas generales para el cálculo de límites

- Sumas y diferencias:

$$\infty + \infty = \infty \; ; \qquad \infty \pm k = \infty$$

- Productos:

$$k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0)$$

- Cocientes:

$$\frac{\infty}{k} = \infty \; ; \qquad \frac{k}{\infty} = 0 \; ; \qquad \frac{k}{0} = \infty \quad (k \neq 0)$$

- Potencias:

$$\infty^k = \begin{cases} \infty & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \; ; \qquad r^\infty = \begin{cases} \infty & r > 1 \\ 0 & 0 < r < 1 \end{cases}$$

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

$\infty - \infty$;

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

$$\infty - \infty \; ; \qquad 0 \cdot \infty \; ;$$

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

$$\infty - \infty \; ; \qquad 0 \cdot \infty \; ; \qquad \frac{\infty}{\infty} \; ; \quad \frac{0}{0} \; ;$$

Casos de indeterminación

Cuando en el cálculo de límites no pueden aplicarse las reglas generales, se habla de límites indeterminados.

Que un límite sea indeterminado no quiere decir que no exista. Quiere decir que no puede calcularse por las reglas generales.

Las indeterminaciones son de alguno de los tipos siguientes:

$$\infty - \infty \, ; \qquad 0 \cdot \infty \, ; \qquad \frac{\infty}{\infty} \, ; \quad \frac{0}{0} \, ; \qquad \infty^0 \, ; \quad 1^\infty \, ; \quad 0^0$$

Orden de los infinitos

Muchos límites del tipo $\infty - \infty$ o $\frac{\infty}{\infty}$ pueden calcularse teniendo en cuenta el siguiente orden para las funciones que tienden a infinito:

Orden de los infinitos

Muchos límites del tipo $\infty - \infty$ o $\frac{\infty}{\infty}$ pueden calcularse teniendo en cuenta el siguiente orden para las funciones que tienden a infinito:

- Funciones exponenciales ordenadas según la base.

Orden de los infinitos

Muchos límites del tipo $\infty - \infty$ o $\frac{\infty}{\infty}$ pueden calcularse teniendo en cuenta el siguiente orden para las funciones que tienden a infinito:

- Funciones exponenciales ordenadas según la base.
- Funciones potenciales ordenadas según el exponente.

Orden de los infinitos

Muchos límites del tipo $\infty - \infty$ o $\frac{\infty}{\infty}$ pueden calcularse teniendo en cuenta el siguiente orden para las funciones que tienden a infinito:

- Funciones exponenciales ordenadas según la base.
- Funciones potenciales ordenadas según el exponente.
- Funciones logarítmicas.

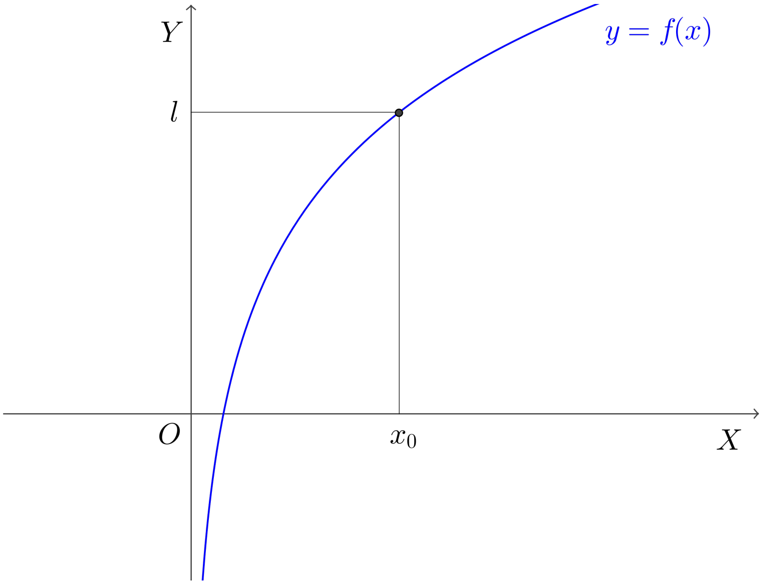
Orden de los infinitos

Muchos límites del tipo $\infty - \infty$ o $\frac{\infty}{\infty}$ pueden calcularse teniendo en cuenta el siguiente orden para las funciones que tienden a infinito:

- Funciones exponenciales ordenadas según la base.
- Funciones potenciales ordenadas según el exponente.
- Funciones logarítmicas.

En el cálculo de límites cualquiera de estas funciones es despreciable frente a otra de orden superior.

Límite cuando x tiende a un número finito (1)



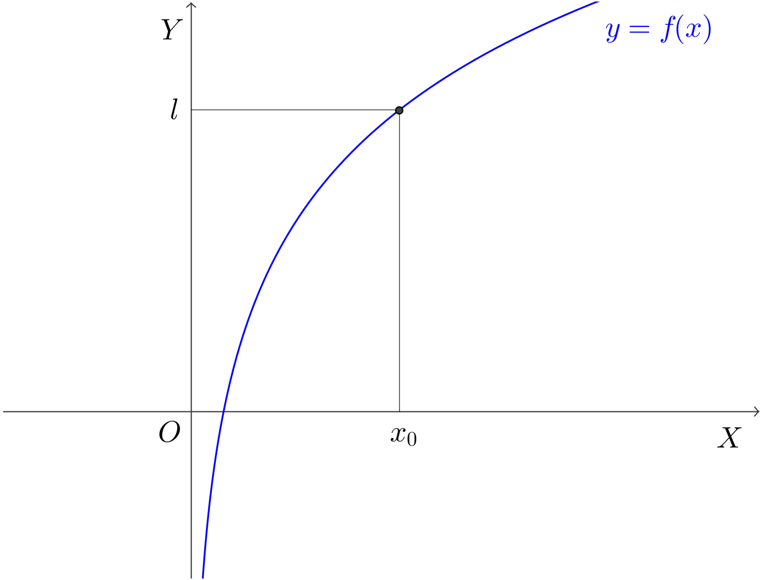
Límite cuando x tiende a un número finito (2)

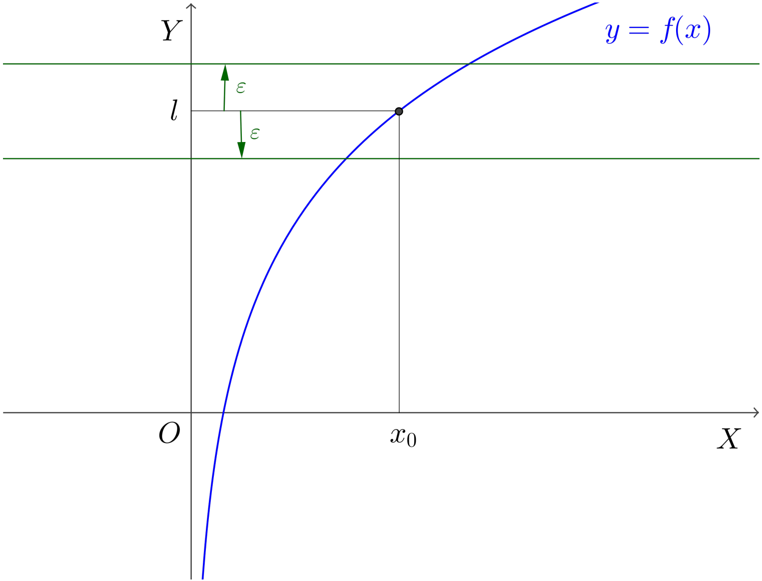
El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual a l si para valores de x muy próximos a x_0, los valores de la función $f(x)$ son muy próximos a l.

En ese caso se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

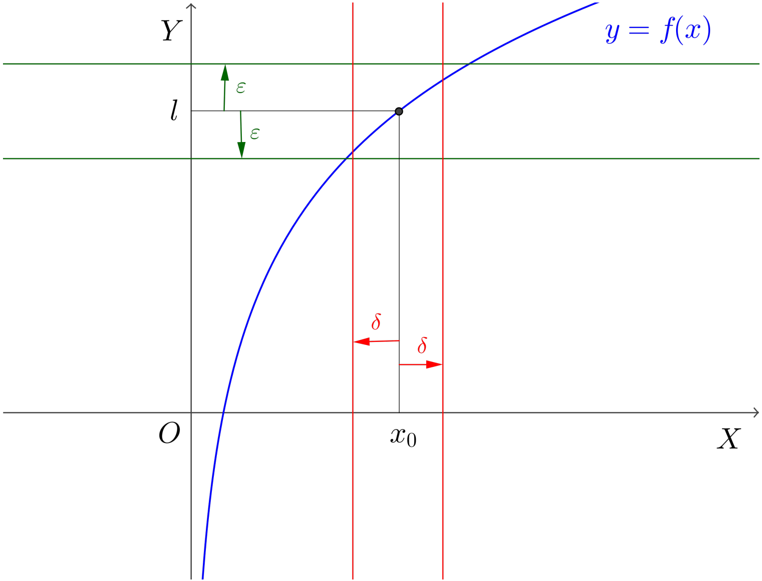
Límite cuando x tiende a un número finito (3)





Y
y = f(x)
ε
l
ε
O
x0
X

Límite cuando x tiende a un número finito (3)



Límite cuando x tiende a un número finito (4)

Definición (Límite cuando $x \to x_0$)

El límite cuando x tiende a x_0 de la función $f(x)$ es igual a l y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta \quad | \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

- Existe la función en x_0.

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

- Existe la función en x_0.
- Existe el límite de la función cuando x tiende a x_0.

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

- Existe la función en x_0.
- Existe el límite de la función cuando x tiende a x_0.
- Ambos números son iguales.

Función continua

Definición (Función continua)

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

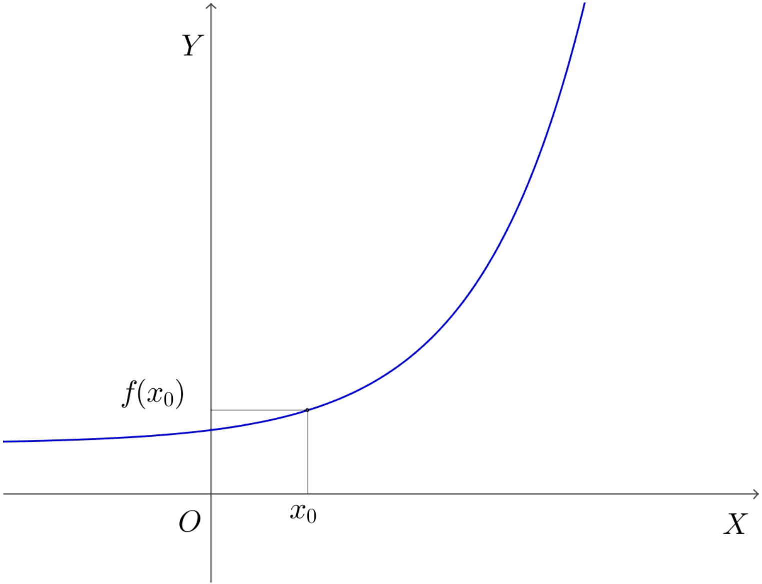
$$f \text{ continua en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en x_0 deben cumplirse tres condiciones:

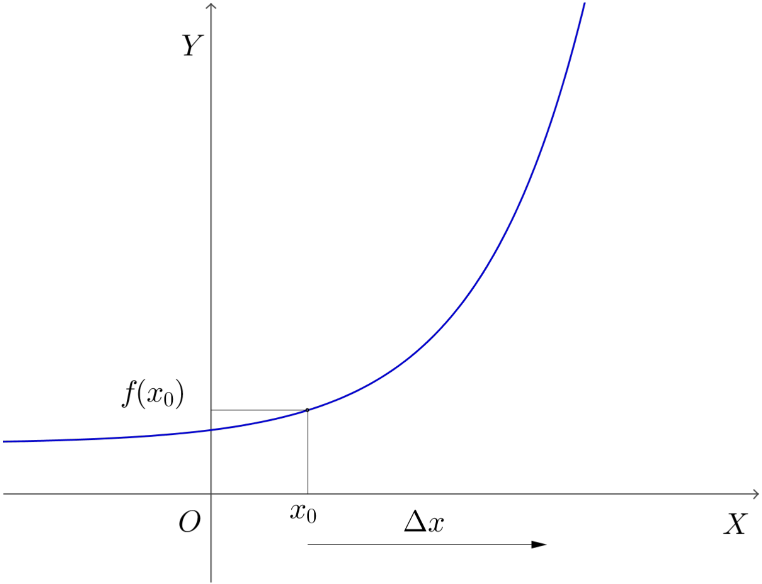
- Existe la función en x_0.
- Existe el límite de la función cuando x tiende a x_0.
- Ambos números son iguales.

Las funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas y circulares son continuas en todo su dominio de definición.

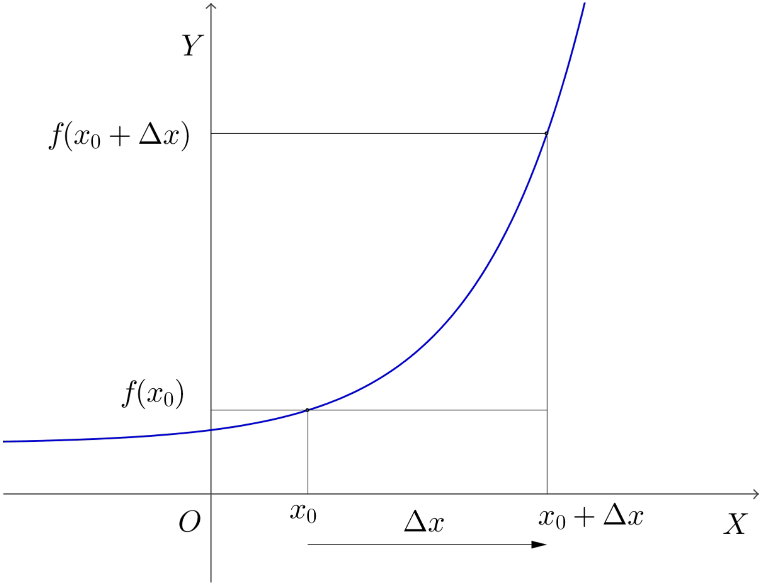
Nueva definición de continuidad



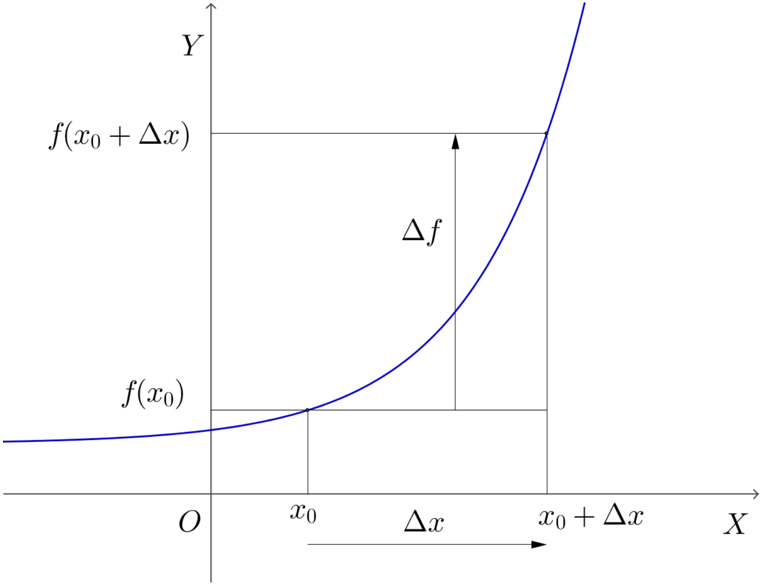
Nueva definición de continuidad



Nueva definición de continuidad



Nueva definición de continuidad



Nueva definición de continuidad

$$f \text{ continua en } x_0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nueva definición de continuidad

$$
\begin{aligned}
f \text{ continua en } x_0 &\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)
\end{aligned}
$$

Nueva definición de continuidad

$$\begin{aligned} f \text{ continua en } x_0 &\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \\ &\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Nueva definición de continuidad

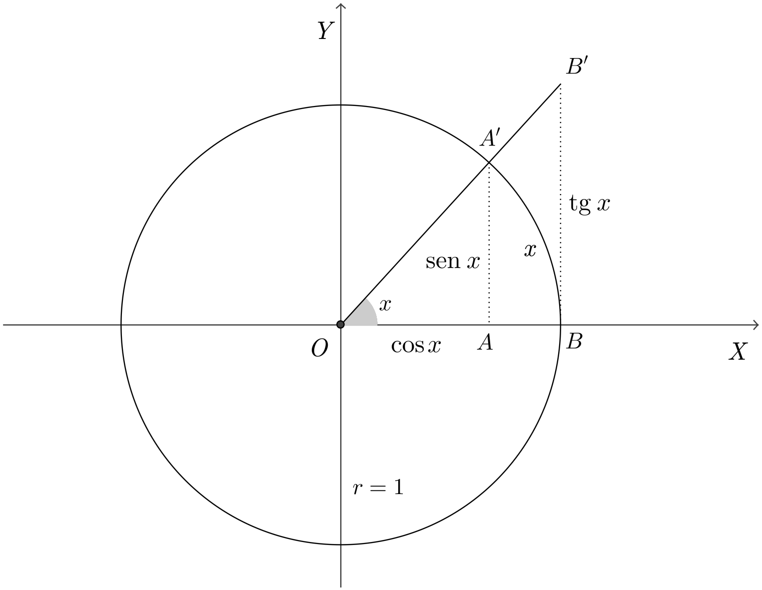
$$
\begin{aligned}
f \text{ continua en } x_0 &\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0) \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 0 \\
&\Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0
\end{aligned}
$$

Nueva definición de continuidad

$$\begin{aligned} f \text{ continua en } x_0 &\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \\ &\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \end{aligned}$$

Definición (Función continua)

Una función es continua en el punto x_0 si a variaciones infinitesimales de la variable independiente, corresponden variaciones infinitesimales de la variable dependiente.



Y
B'
A'
$\operatorname{tg} x$
x
$\operatorname{sen} x$
x
O
$\cos x$
A
B
X
$r = 1$

$$\text{área triángulo } OAA' < \text{área sector } OBA' < \text{área triángulo } OBA'$$

área triángulo OAA' $<$ área sector OBA' $<$ área triángulo OBA'

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$$

área triángulo OAA' $<$ área sector OBA' $<$ área triángulo OBA'

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\Longrightarrow \cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{área triángulo } OAA' < \text{área sector } OBA' < \text{área triángulo } OBA'$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\Longrightarrow \cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

área triángulo OAA' < área sector OBA' < área triángulo OBA'

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen} x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg} x$$

$$\Longrightarrow \cos x<\frac{x}{\operatorname{sen} x}<\frac{1}{\cos x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\cos x\leq\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\leq\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$\Longrightarrow 1\leq\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\leq 1$$

área triángulo OAA' < área sector OBA' < área triángulo OBA'

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg} x$$

$$\Longrightarrow \cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\cos x \leq \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$\Longrightarrow 1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

El número e se define como el límite:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Límites de funciones logarítmicas

El número e se define como el límite:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

Límites de funciones logarítmicas

El número e se define como el límite:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) \\ &= \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Límites de funciones logarítmicas

El número e se define como el límite:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)\\ &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

Indeterminaciones del tipo 1^∞

Si la función u tiende a 1 y la función v tiende a infinito:

$$\lim u^v = \lim e^{(u-1)v}$$

Indeterminaciones del tipo 1^∞

Si la función u tiende a 1 y la función v tiende a infinito:

$$\lim u^v = \lim e^{(u-1)v}$$

En efecto:

$$\lim u^v = \lim e^{v \ln u}$$

Indeterminaciones del tipo 1^∞

Si la función u tiende a 1 y la función v tiende a infinito:

$$\lim u^v = \lim e^{(u-1)v}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\lim u^v &= \lim e^{v \ln u} \\ &= \lim e^{v \ln[1+(u-1)]}\end{aligned}$$

Indeterminaciones del tipo 1^∞

Si la función u tiende a 1 y la función v tiende a infinito:

$$\lim u^v = \lim e^{(u-1)v}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \lim u^v &= \lim e^{v \ln u} \\ &= \lim e^{v \ln[1+(u-1)]} \\ &= \lim e^{v(u-1)} \end{aligned}$$

Infinitésimos equivalentes

Al calcular límites son útiles las siguientes equivalencias cuando x tiende a 0:

Infinitésimos equivalentes

Al calcular límites son útiles las siguientes equivalencias cuando x tiende a 0:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

Infinitésimos equivalentes

Al calcular límites son útiles las siguientes equivalencias cuando x tiende a 0:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

Infinitésimos equivalentes

Al calcular límites son útiles las siguientes equivalencias cuando x tiende a 0:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

Infinitésimos equivalentes

Al calcular límites son útiles las siguientes equivalencias cuando x tiende a 0:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\operatorname{arsen} x \sim x$$

Infinitésimos equivalentes

Al calcular límites son útiles las siguientes equivalencias cuando x tiende a 0:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\operatorname{arsen} x \sim x$$

$$\operatorname{artg} x \sim x$$

Infinitésimos equivalentes

Al calcular límites son útiles las siguientes equivalencias cuando x tiende a 0:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\operatorname{arsen} x \sim x$$

$$\operatorname{artg} x \sim x$$

$$\ln(1 + x) \sim x$$

Infinitésimos equivalentes

Al calcular límites son útiles las siguientes equivalencias cuando x tiende a 0:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

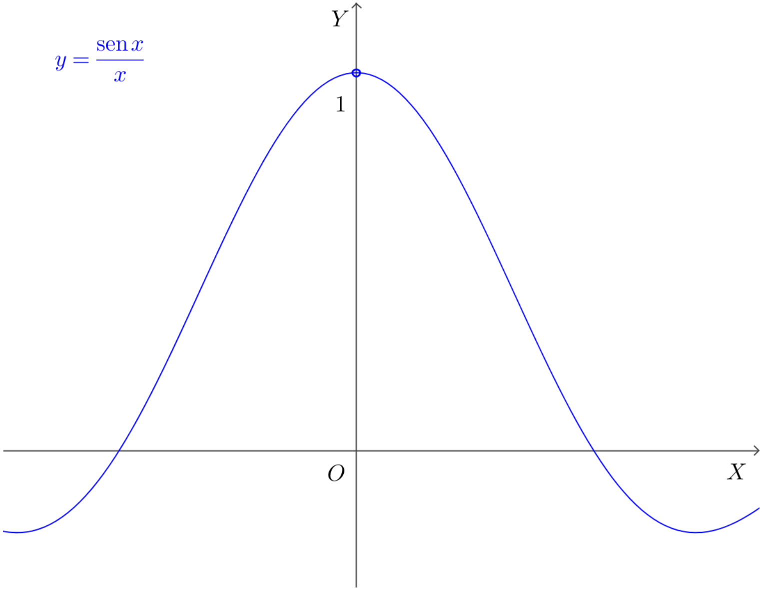
$$\operatorname{arsen} x \sim x$$

$$\operatorname{artg} x \sim x$$

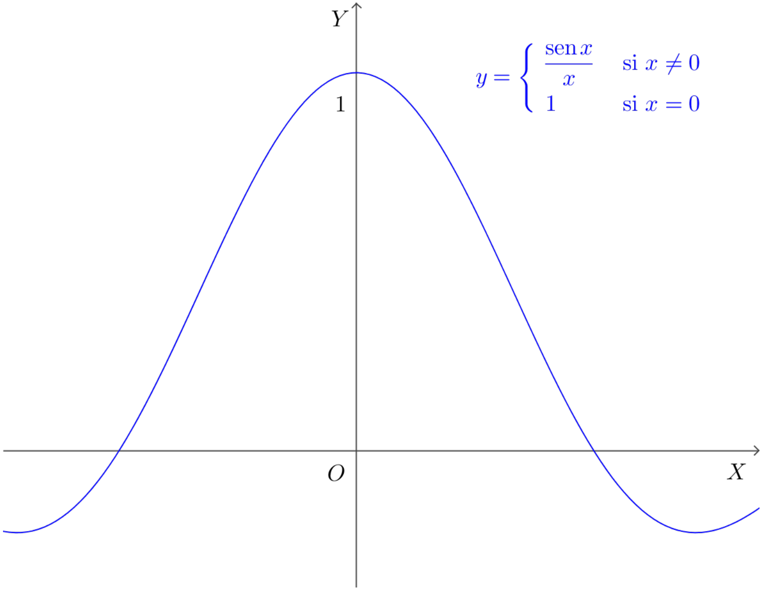
$$\ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

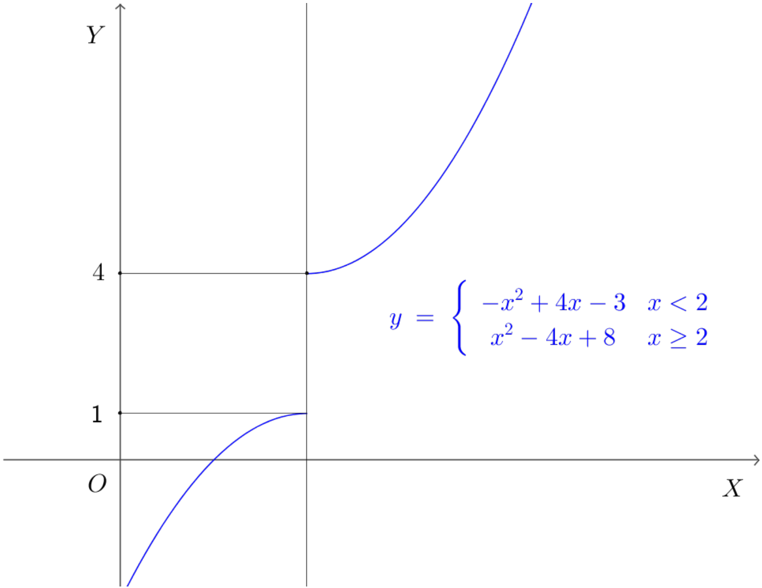
Tipos de discontinuidad(1): evitable



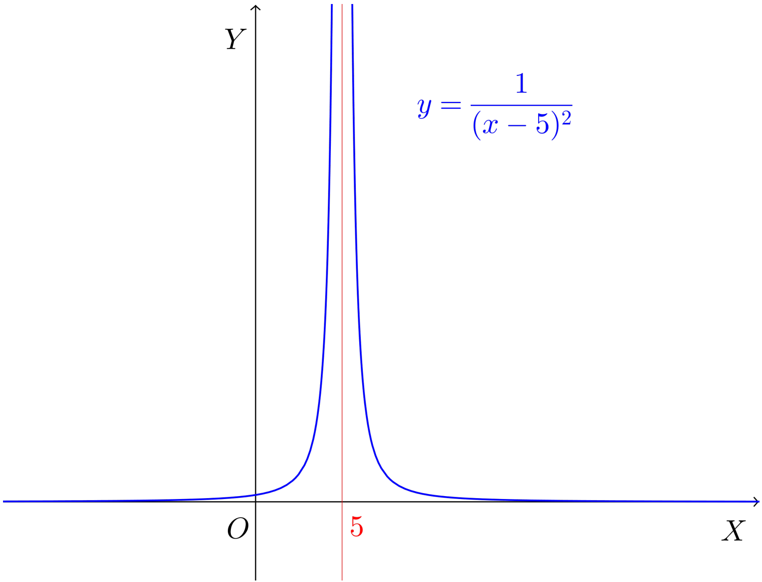
Tipos de discontinuidad(1): evitable



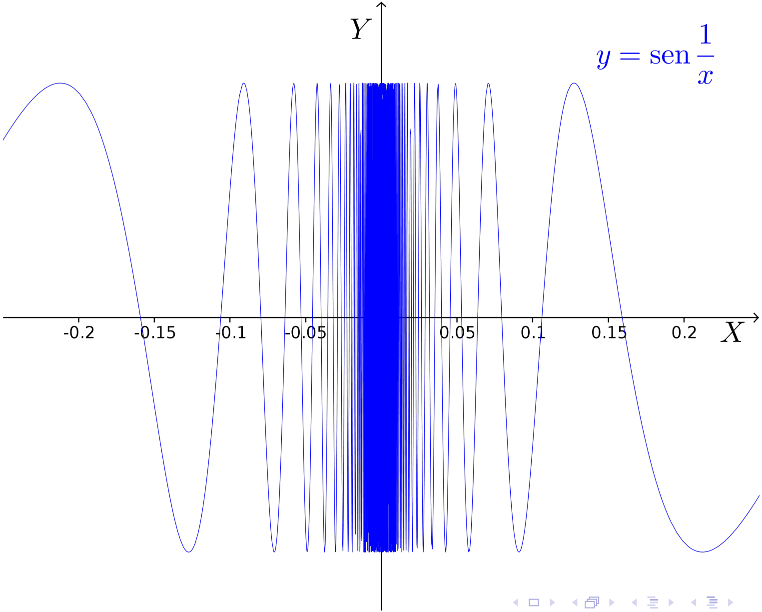
Tipos de discontinuidad(2): salto finito



Tipos de discontinuidad(3): infinito



Tipos de discontinuidad(4): esencial



Tipos de discontinuidad: clasificación

Tipos de discontinuidad: clasificación

- **Evitable**: existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.

Tipos de discontinuidad: clasificación

- **Evitable**: existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.
- **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden.

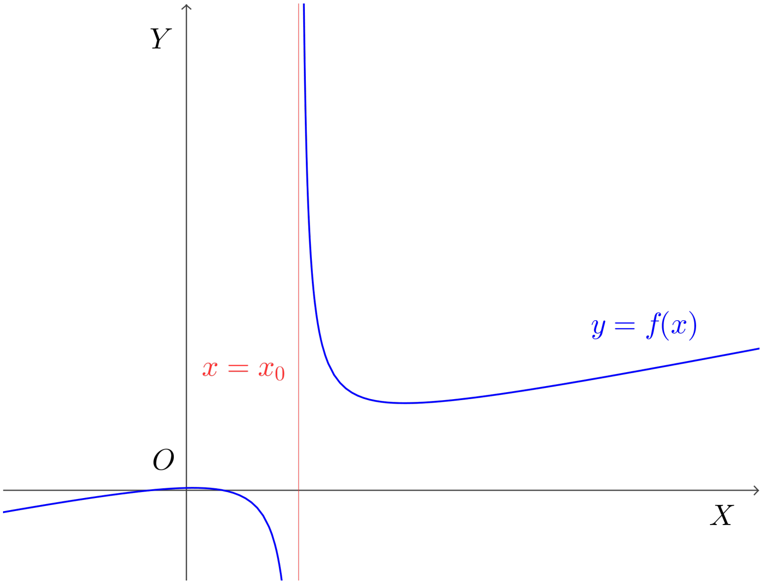
Tipos de discontinuidad: clasificación

- **Evitable**: existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.
- **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden.
- **Infinito**: alguno de los límites laterales es infinito.

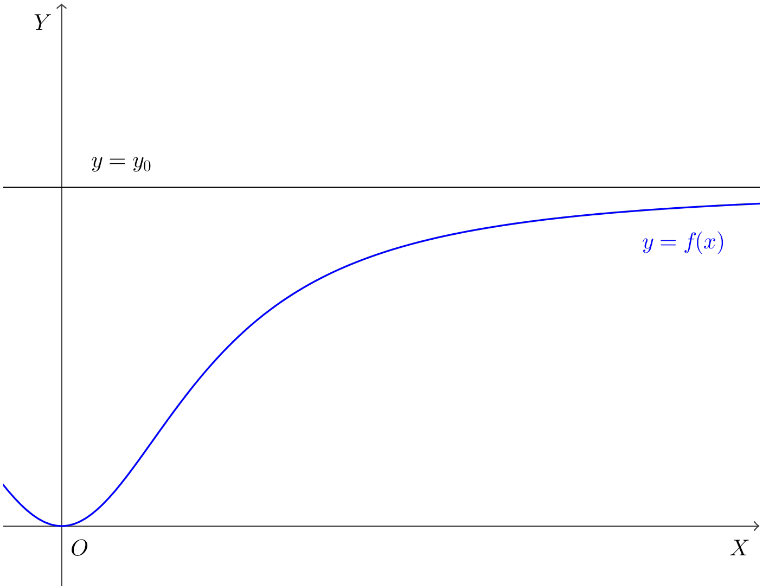
Tipos de discontinuidad: clasificación

- **Evitable**: existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.
- **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden.
- **Infinito**: alguno de los límites laterales es infinito.
- **Esencial**: no existen límites ni son infinitos.

Asíntotas verticales



Asíntotas horizontales



Asíntotas verticales y horizontales: definición

Asíntotas verticales y horizontales: definición

Definición (Asíntota vertical)

La recta $x = x_0$ es asíntota vertical de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Asíntotas verticales y horizontales: definición

Definición (Asíntota vertical)

La recta $x = x_0$ es asíntota vertical de la función $f(x)$ si:

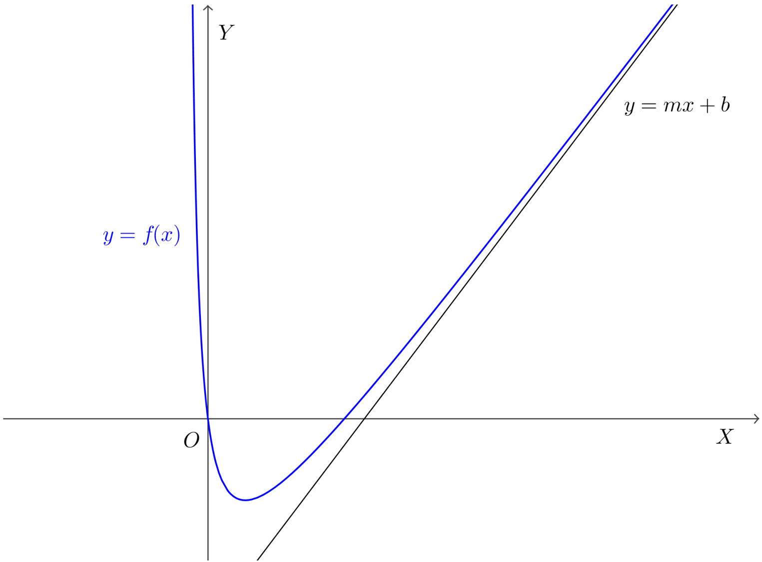
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Definición (Asíntota horizontal)

La recta $y = y_0$ es asíntota horizontal de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$$

Asíntotas oblicuas



Asíntotas oblicuas: definición

Asíntotas oblicuas: definición

Definición (Asíntota oblicua)

La recta $y = mx + b$ es asíntota de la función $f(x)$ si la diferencia entre las ordenadas de los puntos de la curva y la recta tiende a cero cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - y) = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - b) = 0$$

Asíntotas oblicuas: definición

Definición (Asíntota oblicua)

La recta $y = mx + b$ es asíntota de la función $f(x)$ si la diferencia entre las ordenadas de los puntos de la curva y la recta tiende a cero cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx - b) = 0$$

De aquí podemos calcular m y b:

$$m = \frac{y-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = y - mx = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

Propiedades de las funciones continuas

- Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, en un entorno de x_0 la función toma valores del mismo signo que $f(x_0)$.

Propiedades de las funciones continuas

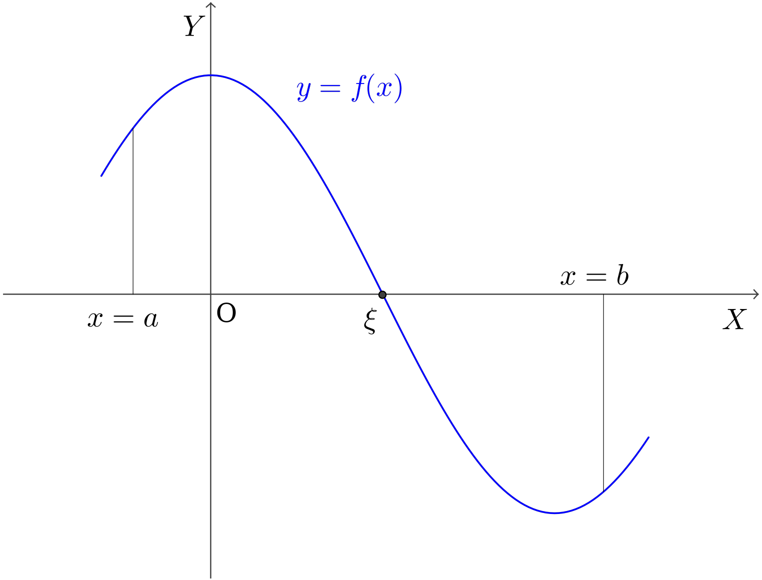
- Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, en un entorno de x_0 la función toma valores del mismo signo que $f(x_0)$.

- Si f es continua en x_0 existe un entorno de x_0 en que la función está acotada.

Propiedades de las funciones continuas

- Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, en un entorno de x_0 la función toma valores del mismo signo que $f(x_0)$.
- Si f es continua en x_0 existe un entorno de x_0 en que la función está acotada.
- Una función continua en un intervalo cerrado, esta acotada en ese intervalo.

Teorema de Bolzano



Teorema de Bolzano

Teorema (Bolzano)

Si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de signo contrario en los extremos entonces, existe un punto interior del intervalo ξ en que el valor de la función es cero:

$$f \text{ continua en } [a, b] \text{ y signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \Longrightarrow \exists \xi \in (a, b) \mid f(\xi) = 0$$

Teorema de Bolzano

Teorema (Bolzano)

Si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de signo contrario en los extremos entonces, existe un punto interior del intervalo ξ en que el valor de la función es cero:

$$f \text{ continua en } [a, b] \text{ y signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \\ \Longrightarrow \exists \xi \in (a, b) \mid f(\xi) = 0$$

Como consecuencia del teorema de Bolzano se verifica que:

Teorema (Darboux)

Si f es una función continua en $[a, b]$ f toma en el interior de ese intervalo todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema (Weierstrass)

Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

Agradecimiento

Gracias por su atención.