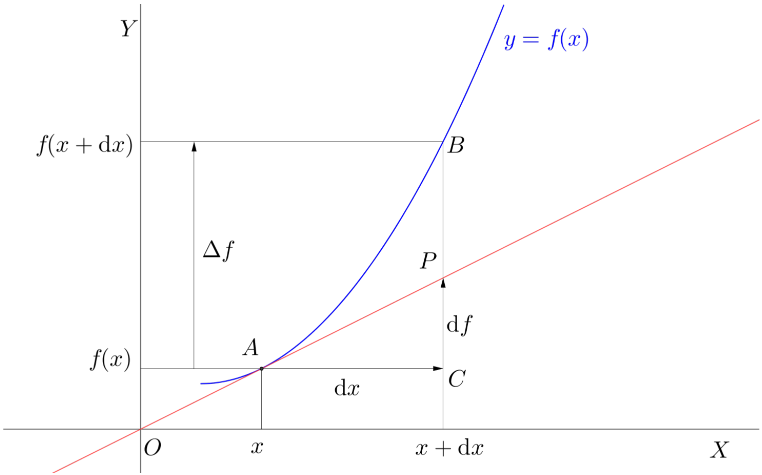
Integrales.

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

Diferencial de una función



Diferencial de una función

Definición

La diferencial de una función f es igual a su derivada por un incremento arbitrario de la variable.

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Diferencial de una función

Definición

La diferencial de una función f es igual a su derivada por un incremento arbitrario de la variable.

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Geométricamente, la diferencial es el incremento en la ordenada de la recta tangente en el punto x, correspondiente a un incremento de la variable $\mathrm{d}x$ (diferencial de x).

Definición

La diferencial de una función f es igual a su derivada por un incremento arbitrario de la variable.

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Geométricamente, la diferencial es el incremento en la ordenada de la recta tangente en el punto x, correspondiente a un incremento de la variable $\mathrm{d}x$ (diferencial de x).

Es común representar la derivada de una función como cociente de diferenciales:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

- En general Δf y $\mathrm{d}f$ no son iguales. Sin embargo, son infinitésimos equivalentes cuando $\mathrm{d}x$ tiende a cero:

$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\Delta f}{\mathrm{d}f} = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} = \frac{f'(x)}{f'(x)} = 1$$

Es por esto que se suele interpretar la diferencial $\mathrm{d}f$ como el incremento de la función correspondiente a un incremento infinitesimal de la variable $\mathrm{d}x$.

- En general Δf y $\mathrm{d}f$ no son iguales. Sin embargo, son infinitésimos equivalentes cuando $\mathrm{d}x$ tiende a cero:

$$\lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{\Delta f}{\mathrm{d}f} = \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{\frac{\Delta f}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} = \frac{f'(x)}{f'(x)} = 1$$

  Es por esto que se suele interpretar la diferencial $\mathrm{d}f$ como el incremento de la función correspondiente a un incremento infinitesimal de la variable $\mathrm{d}x$.

- Las regla de diferenciación son similares a las reglas de derivación, por ejemplo:

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$$

Primitivas de una función

Definición

La función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

Primitivas de una función

Definición

La función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

- Si $F(x)$ es una primitiva de f también lo es $F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera.

Primitivas de una función

Definición

La función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

- Si $F(x)$ es una primitiva de f también lo es $F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera.
- Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de f su diferencia es constante:

$$G(x) = F(x) + C$$

Definición

El conjunto de todas las primitivas de la función f se llama integral indefinida de f y se representa por:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integral indefinida

Definición

El conjunto de todas las primitivas de la función f se llama integral indefinida de f y se representa por:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si $F(x)$ es una primitiva cualquiera de f:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Propiedades de la integral indefinida

- La integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int (f(x) \pm g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

Propiedades de la integral indefinida

- La integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

- Las constantes pueden salir del signo integral:

$$\int k f(x) \, \mathrm{d}x = k \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

Propiedades de la integral indefinida

- La integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int (f(x) \pm g(x)) \; \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

- Las constantes pueden salir del signo integral:

$$\int k f(x) \, \mathrm{d}x = k \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

- Integral de una diferencial:

$$\int \mathrm{d}f = f(x) + C$$

Propiedades de la integral indefinida

- La integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

- Las constantes pueden salir del signo integral:

$$\int k f(x) \, \mathrm{d}x = k \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

- Integral de una diferencial:

$$\int \mathrm{d}f = f(x) + C$$

- Regla de integración por partes:

$$\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$$

Integrales inmediatas

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x + C$$

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C \qquad \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{artg} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arsen} x + C$$

Integrales inmediatas: observaciones

- No existe nada parecido a la regla de la cadena que permita integrar funciones compuestas.

Integrales inmediatas: observaciones

- No existe nada parecido a la regla de la cadena que permita integrar funciones compuestas.

- Las fórmulas anteriores siguen siendo válidas si se sustituye x por $x + a$ (a constante). Por ejemplo:

$$\int \cos(x+\pi)\ \mathrm{d}x = \operatorname{sen}(x+\pi) + C$$

Integrales inmediatas: observaciones

- No existe nada parecido a la regla de la cadena que permita integrar funciones compuestas.

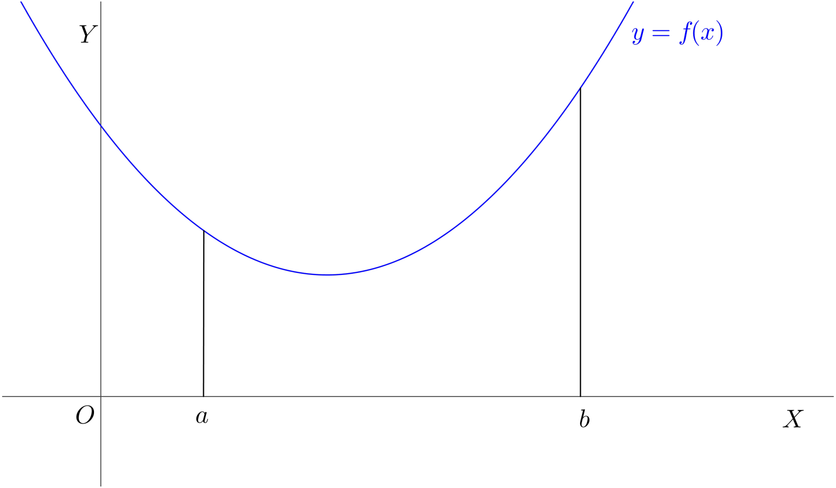
- Las fórmulas anteriores siguen siendo válidas si se sustituye x por $x + a$ (a constante). Por ejemplo:

$$\int \cos(x + \pi)\ \mathrm{d}x = \operatorname{sen}(x + \pi) + C$$

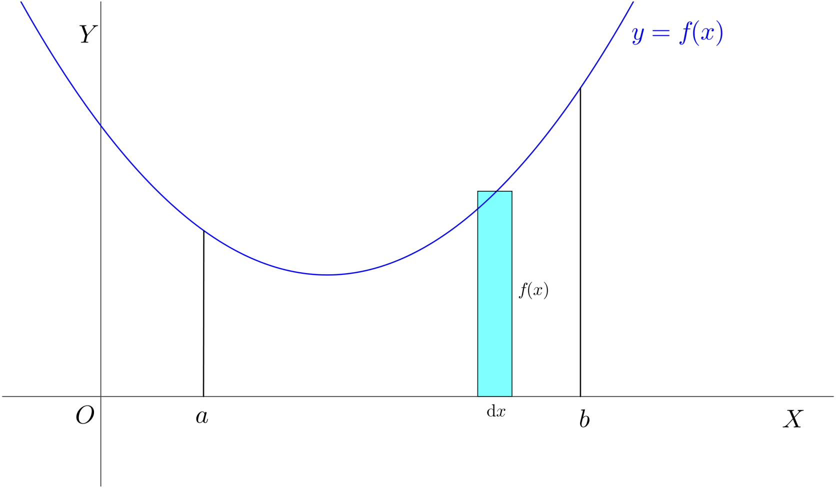
- Si se sustituye x por kx hay que dividir en el segundo miembro por k:

$$\int \cos 2x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + C$$

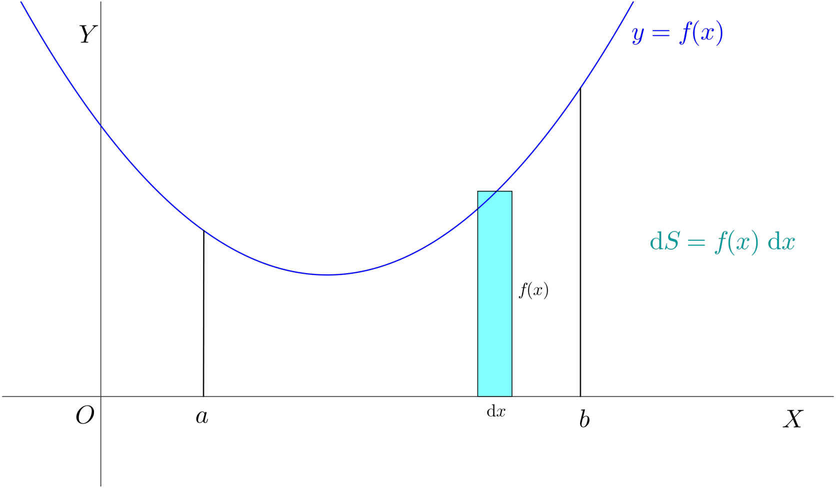
Integral definida



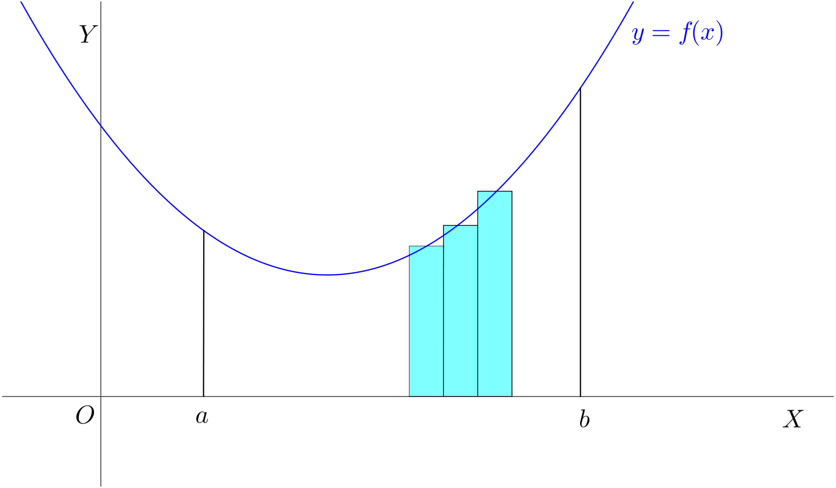
Integral definida



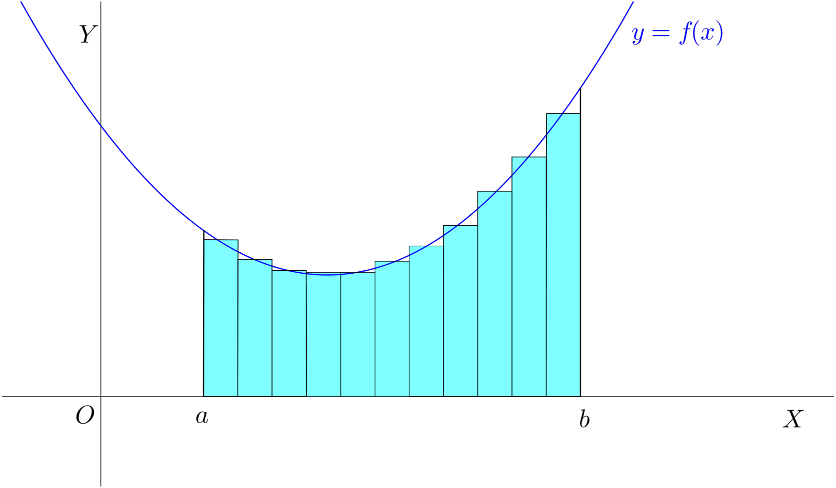
Integral definida



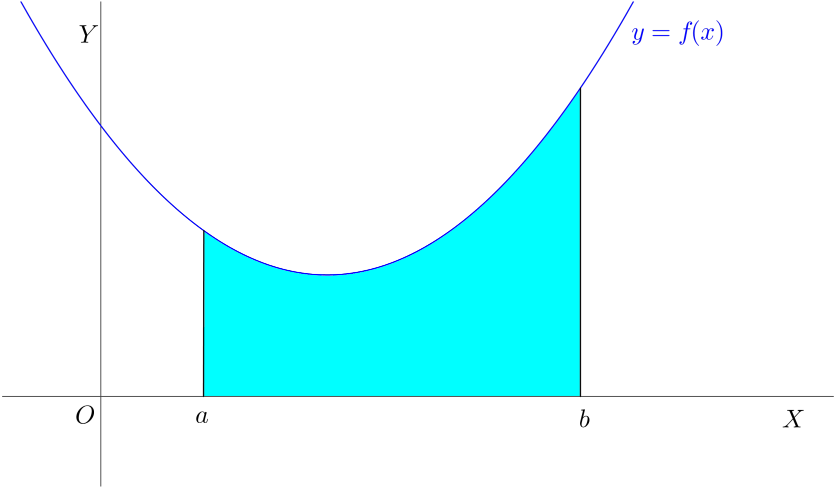
Integral definida



Integral definida



Integral definida



Integral definida: definición

Definición (Integral definida)

Sea f una función definida en $[a, b]$. Dividamos este intervalo en subintervalos de longitud $\mathrm{d}x$. La suma de los productos $f(x)\,\mathrm{d}x$ cuando $\mathrm{d}x$ tiende a cero se llama integral definida de la función f entre a y b y se representa por:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integral definida: interpretación geométrica

- Si la función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$, la integral definida es el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Integral definida: interpretación geométrica

- Si la función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$, la integral definida es el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Si $f(x)$ es negativa en $[a, b]$, la integral es igual al área comprendida entre la curva, el eje y las rectas cambiada de signo.

Integral definida: interpretación geométrica

- Si la función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$, la integral definida es el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Si $f(x)$ es negativa en $[a, b]$, la integral es igual al área comprendida entre la curva, el eje y las rectas cambiada de signo.
- Finalmente, si la función cambia de signo en el intervalo, la integral es igual a la diferencia entre la porción de área que queda sobre el eje OX y la que queda por debajo.

Integral definida: propiedades

1. Límites iguales:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Integral definida: propiedades

1. Límites iguales:
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

2. Cambio de límites:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integral definida: propiedades

1. Límites iguales:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

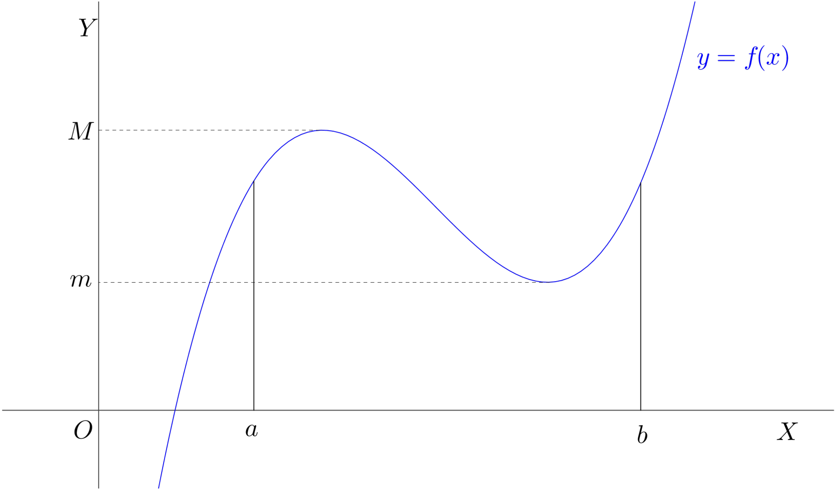
2. Cambio de límites:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Aditividad respecto al intervalo:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema del valor medio



Teorema del valor medio del cálculo integral

Teorema (del valor medio)

Si f es una función continua en a, b la integral de f en $[a, b]$ es igual a la longitud del intervalo por el valor de f en un punto intermedio:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi) \qquad \xi \in (a, b)$$

Teorema (del valor medio)

Si f es una función continua en a, b la integral de f en $[a, b]$ es igual a la longitud del intervalo por el valor de f en un punto intermedio:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi) \qquad \xi \in (a, b)$$

Demostración.

Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza unos valores M y m máximo y mínimo absoluto. Entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

continuación.

Dividiendo por $b - a$;

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq M$$

continuación.

Dividiendo por $b-a$;

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

Por el teorema de Bolzano, la función f toma todos los valores intermedios entre m y M. Por tanto, existe $\xi \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

continuación.

Dividiendo por $b-a$;

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq M$$

Por el teorema de Bolzano, la función f toma todos los valores intermedios entre m y M. Por tanto, existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi)$$

y por consiguiente:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = (b-a) f(\xi)$$

$\square$

Teorema fundamental del cálculo integral

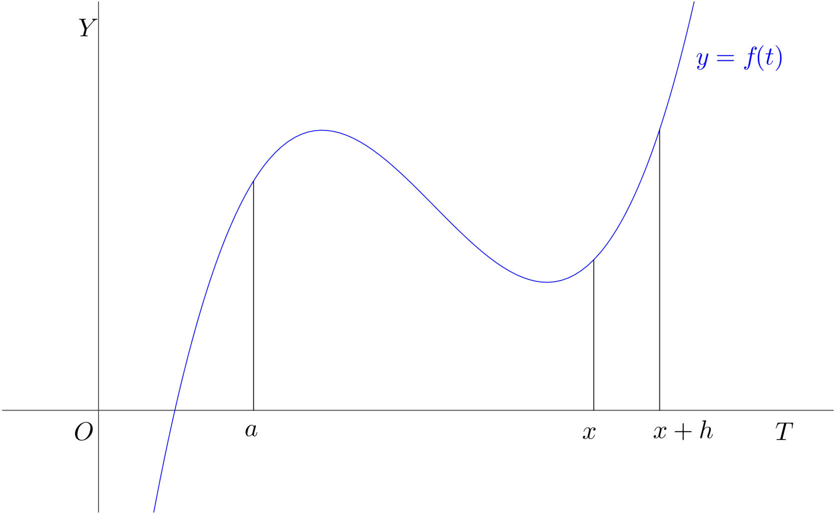
Teorema (Teorema fundamental del cálculo integral)

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. La función:

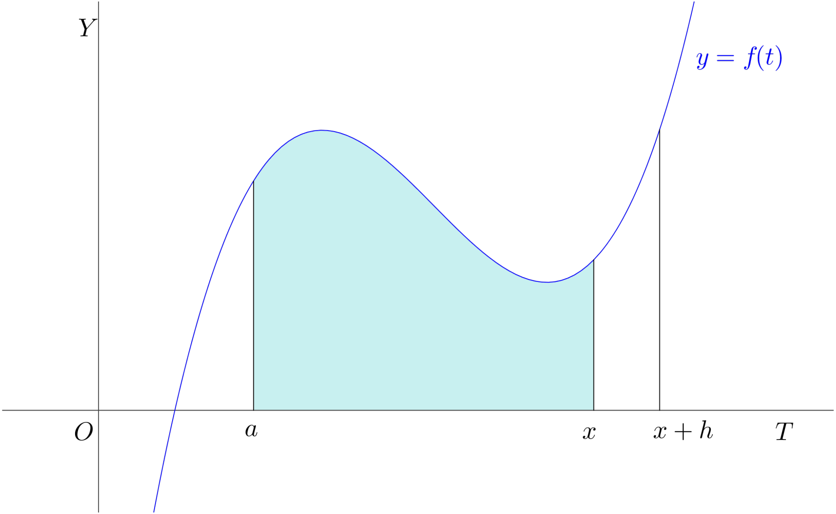
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

dependiente del límite superior de la integral, es una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$.

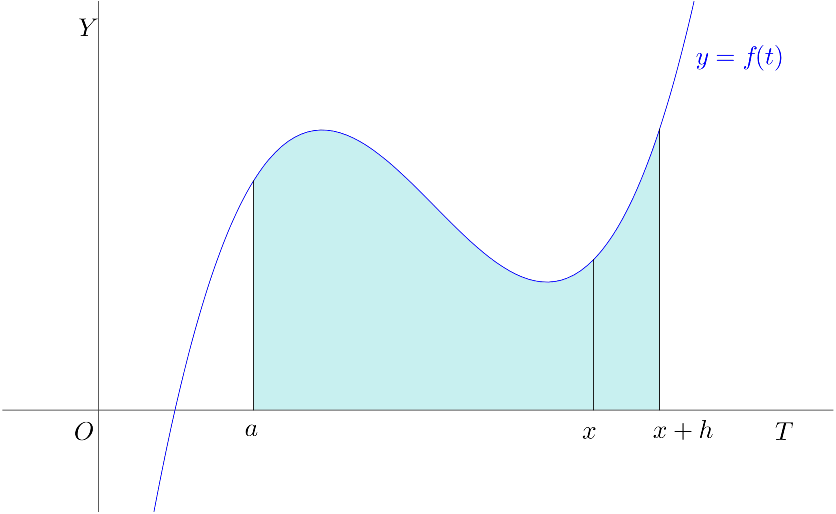
Teorema fundamental del cálculo integral



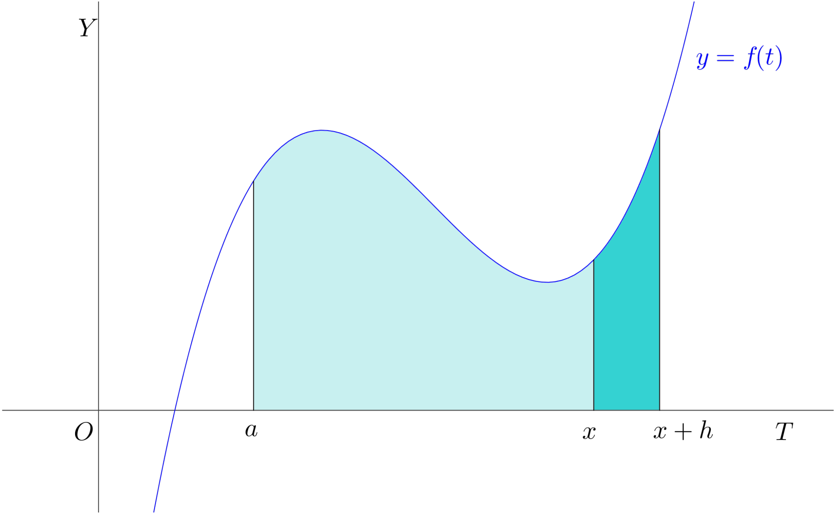
Teorema fundamental del cálculo integral



Teorema fundamental del cálculo integral



Teorema fundamental del cálculo integral



Teorema fundamental del cálculo integral

Demostración.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h f(\xi) & \xi \in (x, x+h) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

□

Regla de Barrow

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$ y F una primitiva cualquiera de f. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Regla de Barrow

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$ y F una primitiva cualquiera de f. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2$$

Demostración.

Por el teorema fundamental:

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Para $x = a$:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) + C = 0 \Longrightarrow C = -F(a)$$

de modo que:

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$$

y sustituyendo $x = b$ resulta el teorema. $\square$