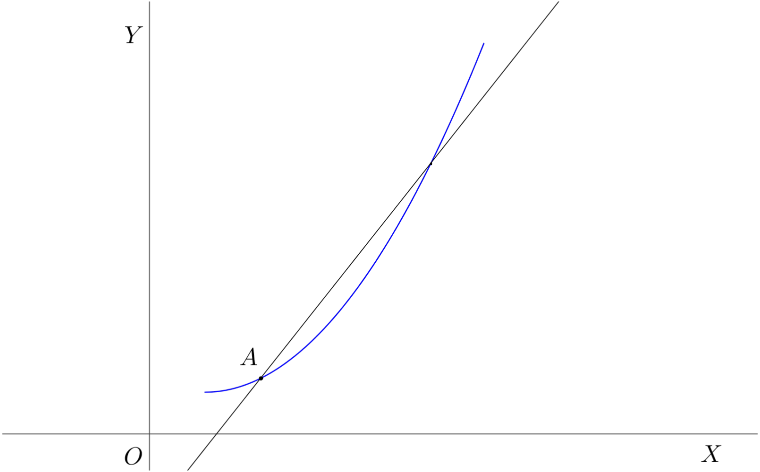
Derivadas.

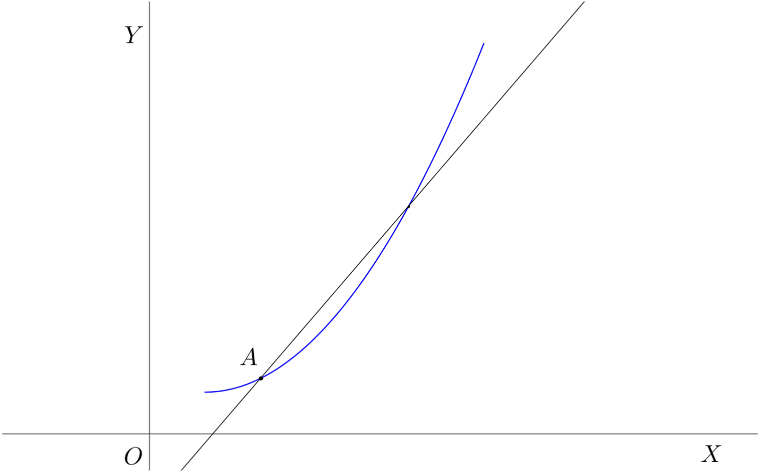
Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

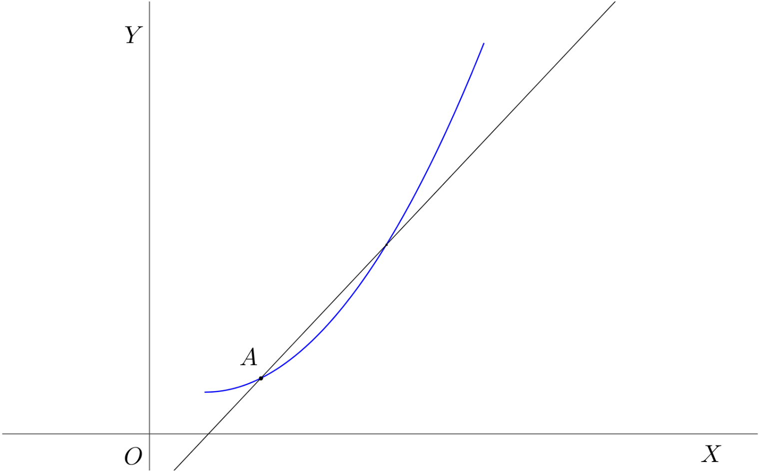
Recta tangente a una curva



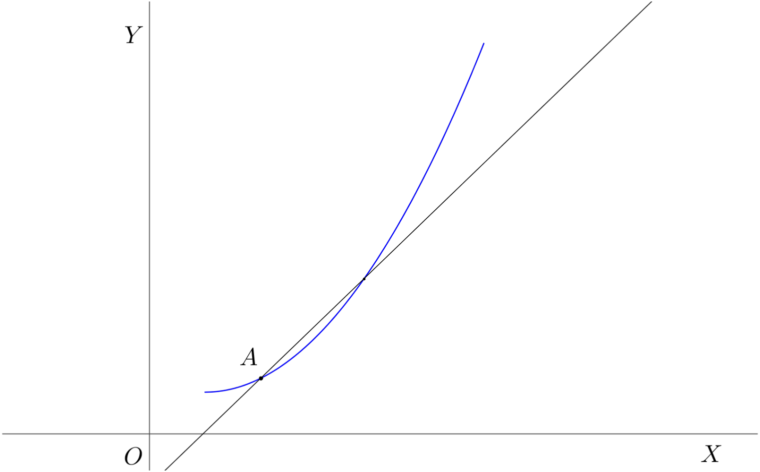
Recta tangente a una curva



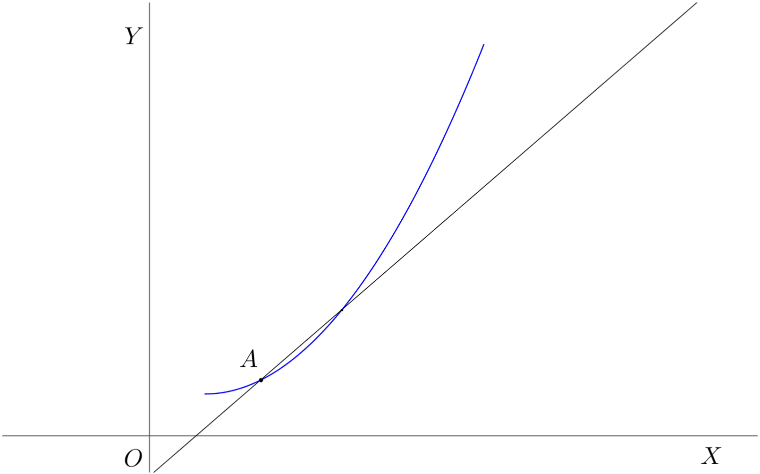
Recta tangente a una curva



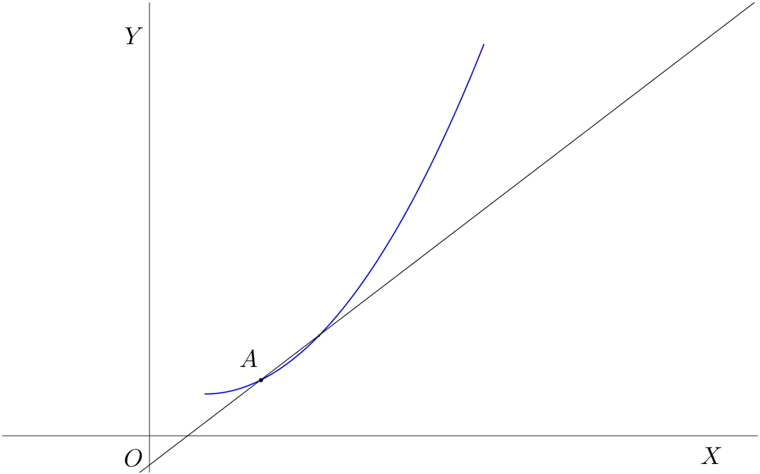
Recta tangente a una curva



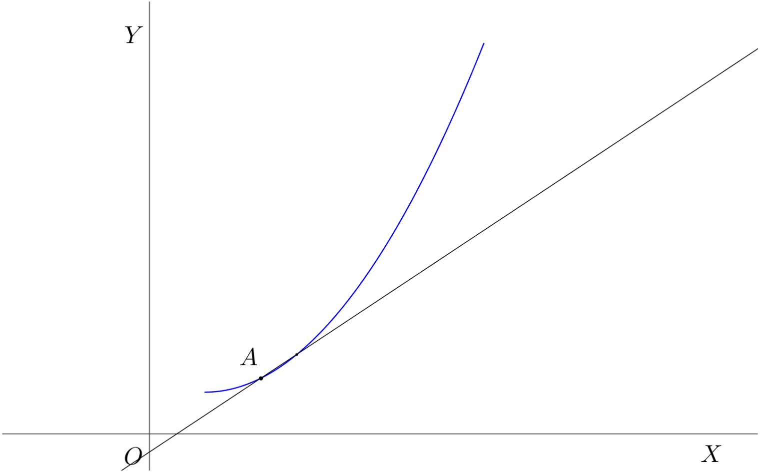
Recta tangente a una curva



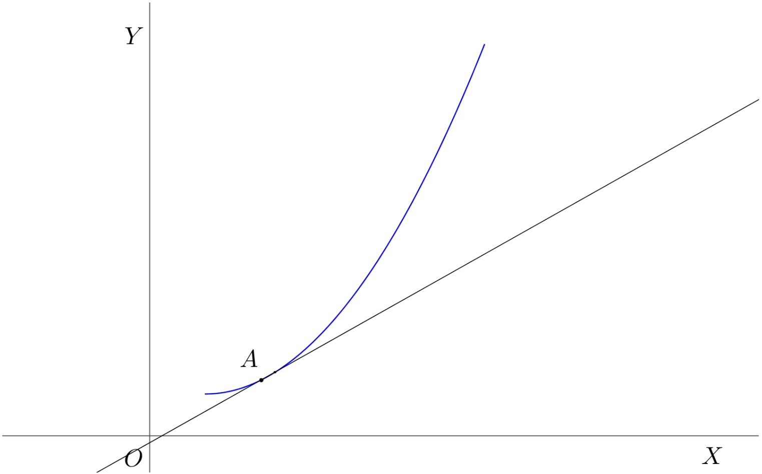
Recta tangente a una curva



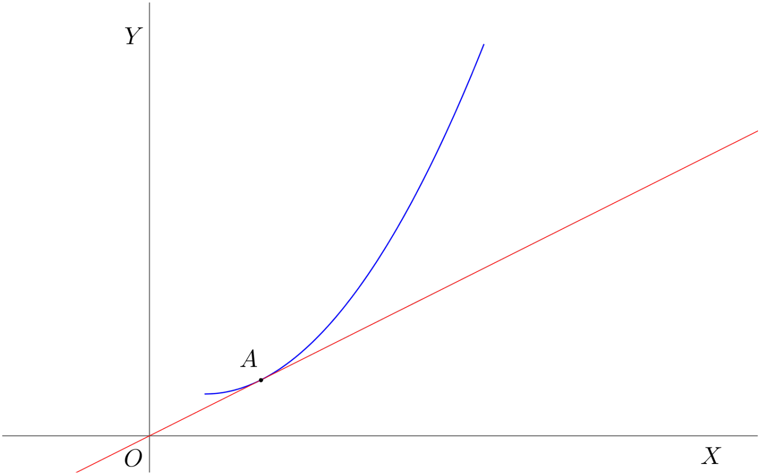
Recta tangente a una curva



Recta tangente a una curva



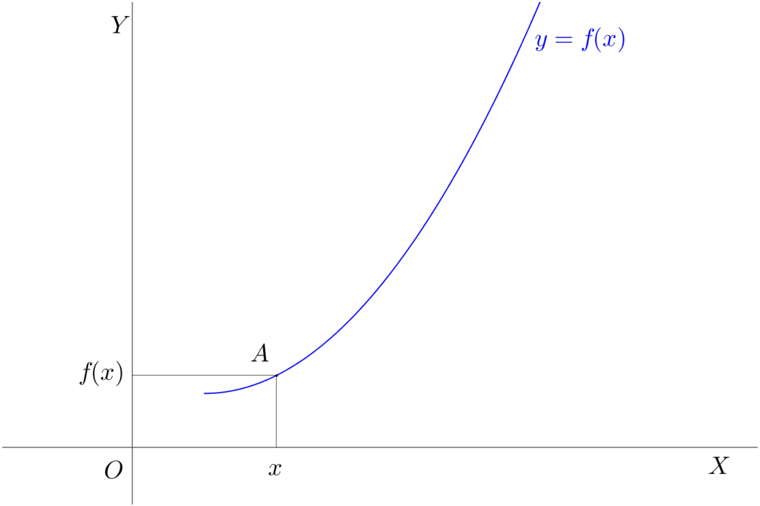
Recta tangente a una curva



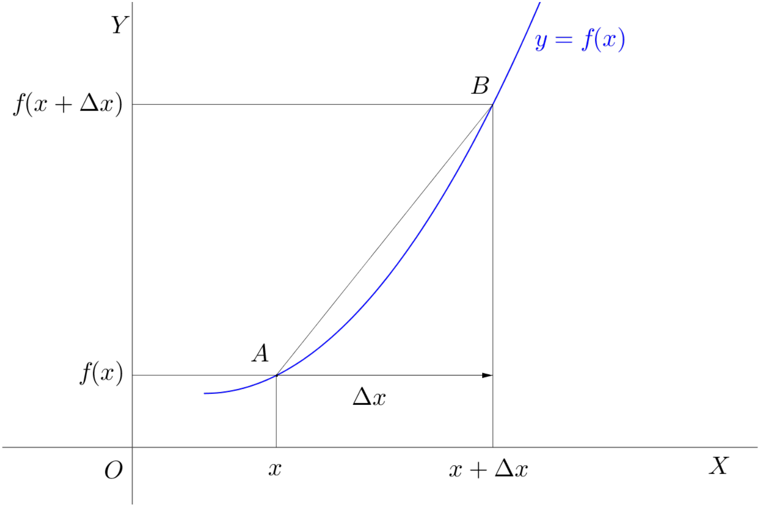
Recta tangente a una curva

Definición

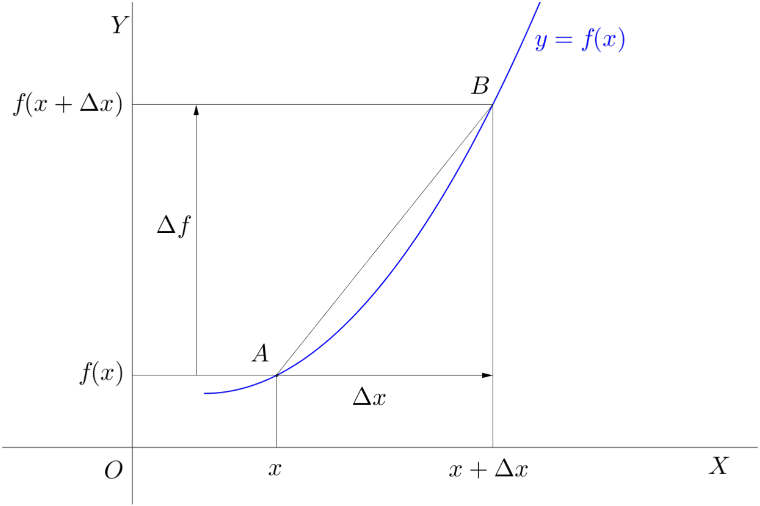
La recta tangente a una curva en un punto A es la recta que une A con otro punto de la curva B, cuando la distancia entre A y B tiende a cero.


Y
$y = f(x)$
A
$f(x)$
O
x
X

Derivada de una función



Derivada de una función



Derivada de una función. Definición

Definición

La derivada de una función en un punto x es el límite del incremento de la función dividido por el incremento de la variable cuando éste tiende a cero.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivada de una función. Definición

Definición

La derivada de una función en un punto x es el límite del incremento de la función dividido por el incremento de la variable cuando éste tiende a cero.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Teorema

Si una función es derivable en un punto x, es continua en ese punto.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Longrightarrow f \text{ es continua}$$

Interpretación geométrica de la derivada

- La derivada de una función f en un punto puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la curva $y = f(x)$ en ese punto, o bien, como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto.

Interpretación geométrica de la derivada

- La derivada de una función f en un punto puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la curva $y = f(x)$ en ese punto, o bien, como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto.
- La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $A(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

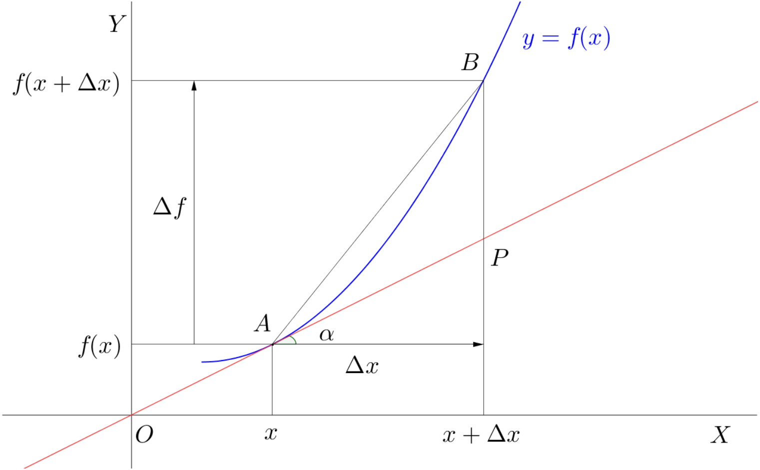
Interpretación geométrica de la derivada

- La derivada de una función f en un punto puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la curva $y = f(x)$ en ese punto, o bien, como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto.
- La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $A(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Geométricamente, el hecho de que la función f tenga derivada en un punto x significa que la curva $y = f(x)$ tiene tangente en el punto de abscisa x.

Interpretación geométrica de la derivada



Derivada de la raíz cuadrada

Sea la función $y = \sqrt{x}$.

Su derivada es:

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Derivada del logaritmo

Sea la función $y = \ln x$.

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\ln(x+h) - \ln x\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h}}{x} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Derivada de la función exponencial

Sea la función $y = e^x$.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} \\ &= e^x \end{aligned}$$

Derivada de la función seno

Sea la función $y = \operatorname{sen} x$.

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\operatorname{sen}\frac{x+h-x}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2}\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\frac{\cancel{h}}{\cancel{2}}}{\cancel{h}} \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

Reglas generales de derivación

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$(Ku)' = Ku'$$
$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$
$$\left(\frac{u}{K}\right)' = \frac{u'}{K}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$
$$(f(u))' = f'(u)u'$$

Derivadas de las funciones elementales

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (u^n)' = nu^{n-1}\,u'$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (e^u)' = e^u\,u'$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

Derivadas de las funciones elementales

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{arsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{artg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{sen} u)' = \cos u \, u'$$

$$(\cos u)' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

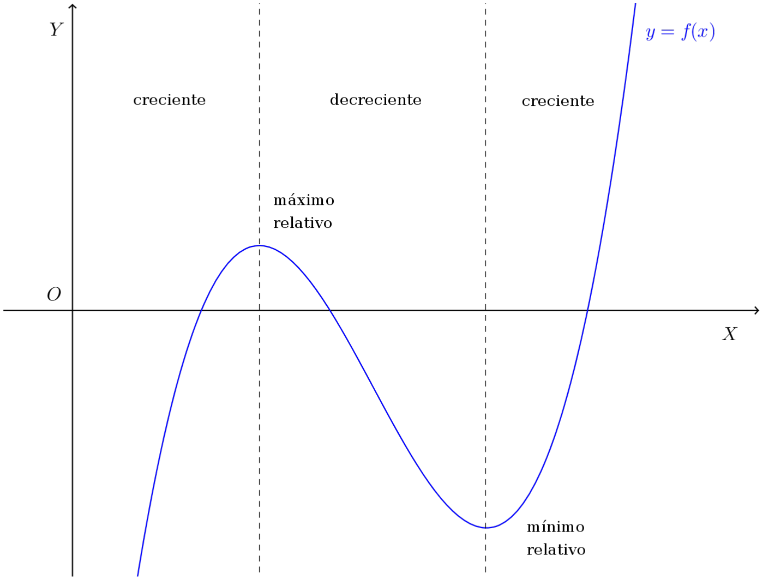
$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$$

$$(\operatorname{arsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{artg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Crecimiento y decrecimiento



Crecimiento y decrecimiento

Definición (Función creciente)

Una función f es creciente en un intervalo, si para cualesquiera x_1, x_2 del intervalo:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Definición (Función decreciente)

Una función f es decreciente en un intervalo, si para cualesquiera x_1, x_2 del intervalo:

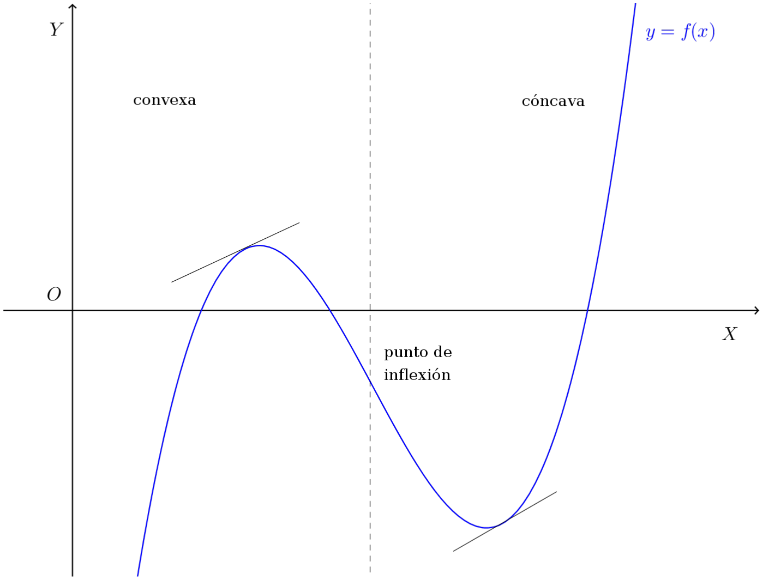
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Crecimiento y decrecimiento

(Monotonía y derivada)

- $f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ creciente en x_0
- $f'(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ decreciente en x_0
- Si $f'(x_0) = 0$ pueden darse estos casos:
  - Si la función es creciente (decreciente) a la izquierda y la derecha de x_0 también es creciente (decreciente) en x_0.
  - Si la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha, la función tiene un máximo en x_0.
  - Si la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha. la función tiene un mínimo en x_0.

Concavidad y convexidad



Concavidad y convexidad

(Curvatura y derivada segunda)

- $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ cóncava en x_0
- $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ convexa en x_0
- Si $f''(x_0) = 0$ pueden darse estos casos:
  - Si la función es cóncava (convexa) a la izquierda y la derecha de x_0 también es cóncava (convexa) en x_0.
  - Si la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava, la función tiene un punto de inflexión en x_0.
  - Si $f'''(x_0) \neq 0$ la función tiene un punto de inflexión en x.

Máximos y mínimos

Puesto que en un máximo la función es convexa y en un mínimo es cóncava, tenemos el siguiente criterio para distinguir máximos y mínimos relativos:

(Criterio de la derivada segunda)

Sea $f'(x_0) = 0$:

- Si $f''(x_0) > 0$ la función tiene un mínimo en x_0
- Si $f''(x_0) < 0$ la función tiene un máximo en x_0

Teorema de Rolle

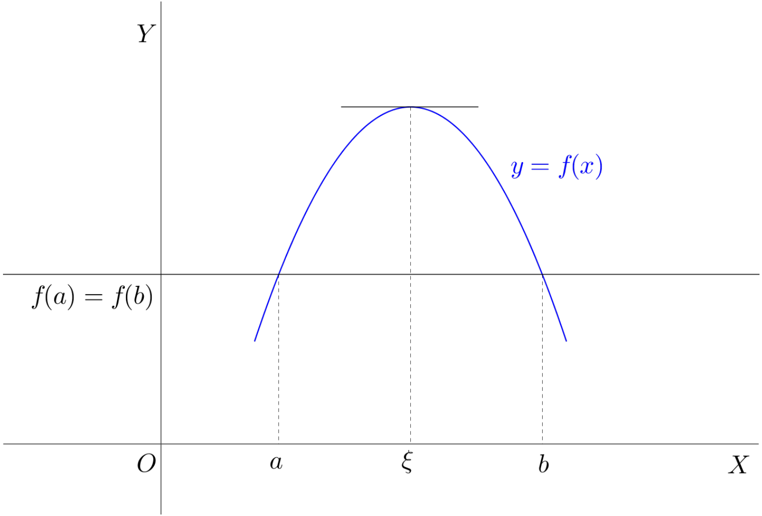
Teorema (Teorema de Rolle)

Sea $f(x)$ una función

- Continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- Derivable en el intervalo abierto (a, b).
- La función toma el mismo valor en los extremos del intervalo:
$$f(a) = f(b)$$

Si se cumplen estas condiciones, existe al menos un punto $\xi \in (a, b)$ en el que $f'(\xi) = 0$.

Teorema de Rolle: interpretación geométrica



Teorema del valor medio

Teorema (del valor medio)

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$$

Demostración.

Sea

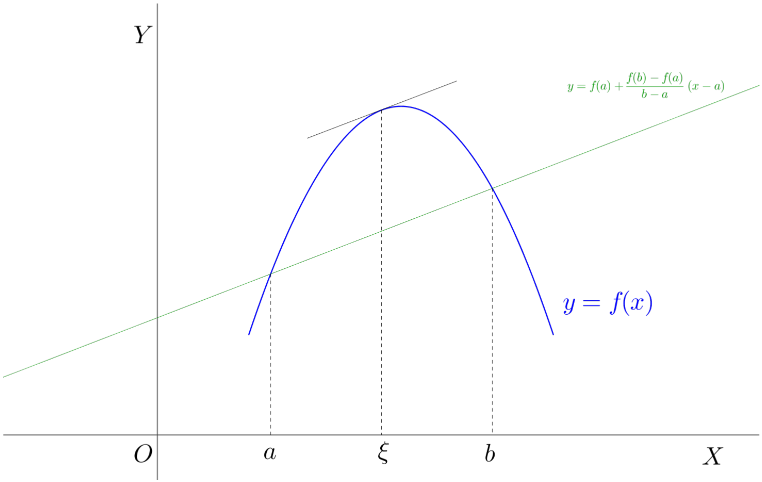
$$F(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

que cumple las tres hipótesis del teorema de Rolle. Entonces:

$$\exists \xi \mid F'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi) = 0$$

y despejando $f(b)$ se obtiene el teorema. □

Interpretación geométrica



Consecuencias del teorema del valor medio

- Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b).
  En efecto, sean $x_1, x_2 \in (a, b)$:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad\qquad \xi \in (x_1, x_2) \\ &= f(x_1) \end{aligned}$$

- Si dos funciones f y g tienen la misma derivada en (a, b), su diferencia es constante en (a, b).
  Para demostrarlo basta aplicar la propiedad anterior a la función $F(x) = f(x) - g(x)$.

Teorema de Cauchy

Teorema (de Cauchy)

Sean f y g funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe $\xi \in (a, b)$ que cumple:

$$[f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi)$$

Demostración.

Basta aplicar el teorema de Rolle a la función:

$$F(x) = [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x)$$

$\square$

Teorema de Cauchy

Teorema (de Cauchy)

Sean f y g funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos que, además, $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in (a, b)$. Entonces existe $\xi \in (a, b)$ que cumple:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Demostración.

Se trata del mismo teorema anterior pero escrito en forma de fracción. Por consiguiente, para demostrarlo basta ver que no se anulan los denominadores.
Por hipótesis $g'(\xi)$ es distinto de cero. Además, por el teorema del valor medio, si la derivada es distinta de cero en el intervalo (a, b), no pueden ser iguales $g(a)$ y $g(b)$. $\square$

Regla de l'Hôpital

Teorema (Regla simple de l'Hôpital)

Sean f y g dos funciones definidas en un entorno de a, derivables en a y tales que $f(a) = g(a) = 0$. En este caso:

$$\text{si } g'(a) \neq 0 \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Demostración.

Es una consecuencia de la definición de derivada:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}
\end{aligned}$$

$\square$

Regla de l'Hôpital. Enunciado.

Teorema (Regla de l'Hôpital)

Sean f y g dos funciones:

- Derivables en un entorno de a.
- Nulas en a: $f(a) = g(a) = 0$.
- La derivada g' no se anula en un entorno reducido de a.

Entonces, si existe el límite del cociente de las derivadas:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración.

Aplicando el teorema de Cauchy en el intervalo $[a, x]$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Siendo ξ un número comprendido entre a y x. Cuando x tiende a a, los números x y ξ se hacen muy próximos de modo que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$