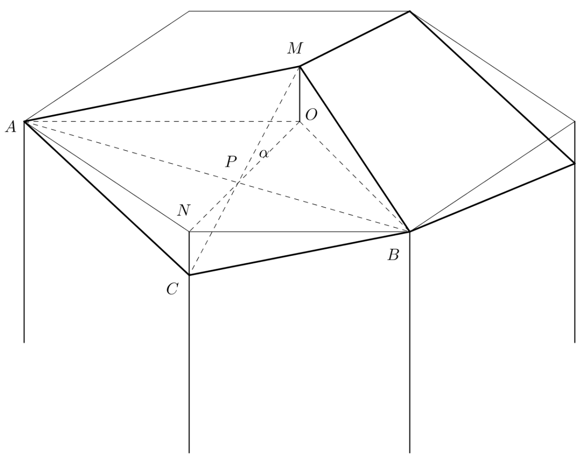
Abejas y matemáticas

P. Puig Adam

Es sabido que las celdillas de las abejas se sncuentran agrupadas unas junto a otras formando como un mosaico de prismas hexagonales regulares (panales), con lo que consiguen una gran economía de cera por los siguientes motivos:

1. Cada pared pertenece a dos celdas.
2. De todos los. polígonos de n lados, de igual extensión, el regular es el de menor perimetro.
3. De los tres polígonos regulares capaces de formar mosaico (triángulo, cuadrado y hexágono), el de menor perímetro, a igualdad de área, es el hexágono. Las abejas adoptan, pues, instintivamente en la construcción de sus panales (por añadidura dispuestos dos a dos para aprovechar el fondo por ambos lados) la forma arquitectónica más económica de material (cera), a igualdad de capacidad de miel.



Pero lo más prodigioso es la solución dada al problema del fondo de la celda. El prisma hexagonal no termina en una cara plana ortogonal al eje, sino en tres caras rómbicas oblicuas como indica la figura. Con ello no se altera el volumen de la celda, pues se compensa el volumen quitado $ANCB$ con el añadido $AMOB$, y análogamente los demás; pero en cambio se altera la superficie total.

¿Qué valor habrá que dar al ángulo α de inclinación de los planos para que esta superficie sea mínima? Se comprende que el mínimo no lo da el fondo hexagonal plano horizontal (que puede imaginarse también constituido por tres rombos iguales), ya que, al inclinar levemente estos tres rombos, es más lo que disminuyen las caras laterales que lo que aumenta el área de dichos rombos. Vamos a expresar cuantitativamente esta variación.

Las caras laterales han disminuido en triángulos como el ANC, NCB, cuya área es, suponiendo el lado del hexágono igual a 1,

$$\frac{1}{2}NC \cdot NB = \frac{1}{2}\,NP\tan\alpha \cdot NB = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\tan\alpha\cdot 1$$

Las seis caras laterales disminuyen, pues, en $\frac{3}{2}\tan\alpha$.

En cuanto al área de cada rombo valdrá:

$$\frac{1}{2}\,AB \cdot MC = \frac{1}{2}\,\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$$

por tanto el area del fondo será

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}$$

Llamando, pues, A al área lateral del prisma recto con fondo hexagonal plano, el área de la celda será:

$$A - \frac{3}{2}\,\tan\alpha + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}$$

cuya derivada vale:

$$-\frac{3}{2}\,\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Anulando esta derivada, queda la ecuación:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad \text{de donde} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

De este valor se deduce fácilmente:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad PM = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\tan\widehat{MBP} = \frac{PM}{PB} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y, finalmente,

$$\widehat{MBP} = 35^{\text{o}}15' \qquad \text{y} \qquad \widehat{MBC} = 70^{\text{o}}30'$$

Este ángulo obtenido teóricamente como solución al problema del mínimo planteado, coincide, con diferencia de sólo $2'$, con el que halló Maraldi experimentalmente tras pacientes medidas en las celdillas de las abejas, es decir, que estos minúsculos y laboriosos ingenieros han resuelto instintivamente, con maravillosa exactitud, el problema técnico del mínimo consumo de cera.

Este problema es célebre en la historia de la ciencia y fué propuesto, por primera vez, por Reaumur a Koenig, quien halló como valor del ángulo del rombo $70^{\text{o}}34'$. Posteriormente fué resuelto con mayor exactitud por Mclaurin y Cramer, y se halla reproducido en los libros de curiosidades científicas.